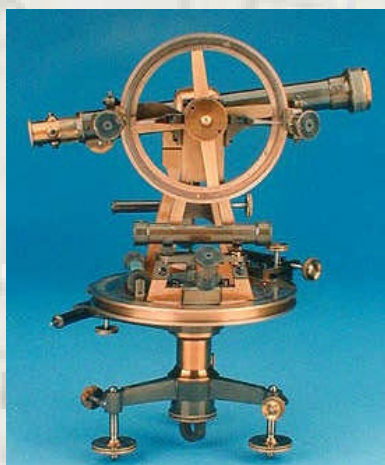


ENGENHARIA GEOGRÁFICA

(DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

APONTAMENTOS DE TOPOGRAFIA



CARLOS ANTUNES
D.M.F.C.U.L.

LISBOA, 1995

Índice

1. Introdução	2
2. Levantamentos topográficos	5
2.1. Medições	14
2.2. Aparelhos e equipamento	16
2.2.1 Teodolito ópticos	16
2.2.2 Teodolito electrónicos	25
2.2.3 Distanciómetros	30
2.2.4 Estações totais	35
2.2.5 Níveis	37
2.2.6 Sistema GPS	39
3. Erros de observação	48
3.1. Tipo de erros	49
3.2. Erros instrumentais e seu tratamento	51
4. Posicionamento Topográfico	55
4.1. Irradiada simple	55
4.2. Intersecção directa	56
4.3. Intersecção inversa	58
4.3.1 Fórmula de Delambre e resolução da intersecção	59
4.3.2 Método de observação	60
4.3.3 Cálculo e ajustamento com observações redundantes	62
4.3. Irradiada sucessiva	66
4.3.1 Redução das observações	67
4.3.2 Lei geral da propagação dos erros	69
4.5. Posicionamento por Satélite	70
5. Nivelamento topográfico	83
5.1 Nivelamento trigonométrico	84
5.2 Nivelamento geométrico	90
6. Poligonação	98
6.1 Configuração geométrica	98
6.2 Cálculo e ajustamento	104
6.2.1 Precisões e tolerâncias dos erros de fecho	104
6.2.2 Método clássico de ajustamento	107
6.2.3 Ajustamento pelo método dos mínimos quadrados	108
7. Levantamento de pormenor	112
8. Edição Topográfica	118
9. Planeamento e gestão de operações em trabalhos de Topografia	123
10. Bibliografia	129

1. INTRODUÇÃO

O objectivo da disciplina de Topografia consiste na aprendizagem de métodos e técnicas de aquisição de dados que possibilitem a determinação das coordenadas de um conjunto de pontos, que descrevam geometricamente uma parcela da superfície do terreno, com rigor e aproximação necessários.

A Topografia é uma disciplina da Geodesia que na sua concepção clássica ocupa-se da representação local de uma parcela da superfície terrestre, sobre a qual o efeito da curvatura terrestre é considerado desprezível (definição de campo topográfico). Contudo, actualmente o desempenho desta disciplina é um pouco mais vasto face às técnicas e metodologia por ela empregue; cite-se o apoio à construção civil no âmbito de grandes obras de engenharia – pontes, barragens, linhas férreas, etc., bem como, a topografia industrial e mineira.

A recolha de dados necessários à elaboração de uma planta ou carta topográfica de uma dada parcela da superfície terrestre é designada por levantamento topográfico. A aquisição da informação topográfica para a elaboração de cartas ou plantas é feita com o recurso a dois métodos: o **método topográfico** ou **clássico** e o **método fotogramétrico**. Na escolha do método mais adequado considera-se essencialmente a área e a escala do levantamento, pois o método topográfico pelo facto de implicar um conjunto significativo de operações de campo torna-o demorado para zonas extensas, e por isso, mais dispendioso face ao método fotogramétrico. Já o método fotogramétrico para zonas demasiado pequenas apresenta custos relativamente elevados e para escalas grandes tem a limitação da altura mínima de voo. Normalmente, salvo raras excepções o método topográfico é utilizado para escalas superiores a 1:1000 e o fotogramétrico para escalas inferiores ou iguais a 1:1000.

A descrição geométrica de uma superfície do espaço físico real é normalmente feita a partir de uma função do tipo $f=f(x, y, z)$ onde z é uma função implícita $z=z(x, y)$. No caso da cartografia terrestre, o plano cartográfico representa, de uma forma biunívoca, a superfície física da Terra, onde $M=x$ (distância à meridiana) e $P=y$ (distância à perpendicular) são as coordenadas planimétricas ou coordenadas cartesianas do plano cartográfico; e, $h=z$ é a coordenada altimétrica (também designada por cota e representada por C). O relevo da superfície é habitualmente definido através de curvas de nível $C=C(M,P)$ ($C=c^{\text{te}}$ para cada nível), constituindo o chamado modelo altimétrico do terreno ou modelo numérico do terreno (DTM – *Digital Terrain Model*).

Apesar da superfície e a sua representação cartográfica serem contínuas, o processo de as determinar é sempre feito a partir de dados discretos, ou seja, a partir de um conjunto finito de pontos coordenados. Este conjunto de pontos coordenados é definido em duas categorias, os **pontos fundamentais ou de apoio**, que dos quais fazem parte os pontos das chamadas redes geodésicas e

topográficas, e os **pontos de pormenor**, que servem para definir a forma e posição dos elementos topográficos em relação a um referencial cartográfico.

Para se ter uma representação cartográfica da superfície terrestre é fundamental que, de acordo com a função atrás referida, se determine dois tipos de coordenadas: planimétricas (M,P) e altimétrica ($h=h(M, P)$). Devido a esta divisão o problema da determinação das coordenadas dos pontos era normalmente resolvido a partir de duas operações distintas de coordenação, a **planimetria** e a **altimetria**. Estas operações podem ser realizadas em simultâneo ou em separado, dependendo das circunstâncias e das imposições feitas à sua determinação, bem como, do tipo de equipamento a utilizar.

A determinação de pontos coordenados resulta de uma operação encadeada, donde um ponto novo é sempre localizado relativamente a outros já conhecidos, dando lugar à chamada operação de transporte de coordenadas. No princípio da cadeia encontram-se os pontos conhecidos da rede geodésica – os vértices geodésicos, e no fim da cadeia estão os pontos de pormenor. Isto, porque não é lícito localizar novos pontos a partir de pontos de pormenor e porque, os vértices geodésicos não estão localizados nas zonas de levantamento de pormenor. Entre os pontos da rede geodésica e os de pormenor, encontram-se os pontos de apoio topográfico, que vão constituir pequenas redes locais de pontos de coordenadas conhecidas ou redes de apoio (**esqueleto do levantamento**). Será a partir destes que é feita a localização e determinação dos pontos de pormenor.

Os conjuntos de pontos da rede geodésica classificam-se em pontos de 1ª, 2ª e 3ª ordem, de acordo com a sua importância e precisão das coordenadas. Os pontos de apoio topográfico (redes de triangulação cadastral e topográfica) classificam-se também em 1ª e 2ª ordem, coincidindo a 1ª ordem topográfica com a 4ª ordem geodésica.

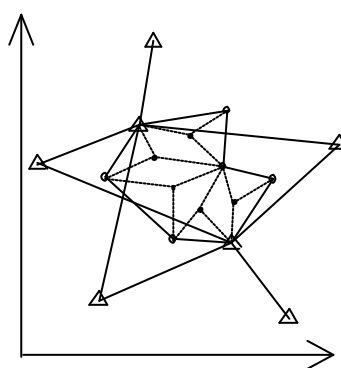


Fig.1.1 - Esqueleto do Levantamento Topográfico

A definição e determinação de redes locais pode ser feita independentemente da sua ligação à rede global, embora normalmente, se respeite o encadeamento.

As operações topográficas de campo, designadas no seu conjunto por *levantamento topográfico*, podem dividir-se pelas seguintes fases:

- 1- Reconhecimento, escolha, implementação e medição da(s) rede(s) locais de apoio;
- 2- Ligação da rede local à rede global (geodésica auxiliar ou cadastral);
- 3- Levantamento de pormenor apoiando-se na rede local;

Após estas três operações/fase fica-se com um modelo numérico do terreno, ou seja, um conjunto de coordenadas dos pontos que representam, em princípio, a forma e dimensão de uma dada parcela da superfície terrestre, relativas a um sistema de referência local ou global. Este conjunto de coordenadas juntamente com outra informação adicional (caracterização dos pontos, formação de polígonos entre pontos, informação característica de áreas, etc.) e ainda com algum tratamento gráfico servirá para a implantação gráfica da superfície que se pretende cartografar, designada por *edição cartográfica*. Esta será uma tarefa que não diz respeito ao topógrafo mas sim ao editor de cartografia, mas no qual o topógrafo desempenha um papel importante, pois é ele que conhece e adquire a informação no terreno. O topógrafo serve pois, de interlocutor com o editor cartográfico.

Nas três fase genéricas mencionadas atrás, há sempre duas operações fundamentais de coordenação, como já foi referido: a planimetria (M,P) e a altimetria (h) ou nivelamento. Na primeira e segunda fase é mais fácil executá-las em separado, pois os pontos podem não coincidir e os aparelhos serem diferentes, na terceira já são hoje em dia executadas em simultâneo, pois os aparelhos utilizados (estações totais) permitem-no fazer com a precisão.

É de extrema importância referir que, actualmente, salvo raras excepções, as duas operações de planimetria e altimetria são sempre executadas em simultâneo, mesmo para as redes de apoio, graças à utilização generalizada do sistema GPS e das estações totais electrónicas.

2. LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO

Ao abordar inicialmente o assunto, comecemos por colocar a questão: que medições é necessário fazer para a concretização do levantamento topográfico?

Atendendo à definição de campo topográfico - área da superfície terrestre em torno dum ponto onde a esfera local pode ser aproximadamente identificada ao plano tangente nesse ponto, podemos então, considerar a Geometria Plana como a ferramenta matemática fundamental, que relaciona aquilo que se mede - observação (relação geométrica entre pontos do espaço) e aquilo que se pretende obter - coordenadas dos pontos.

Assim as medições estritamente necessárias ao levantamento topográfico para a coordenação dos pontos, são: **distâncias** e **ângulos** (coordenadas polares), sobre as quais se pode fazer a seguinte subdivisão:

	Tipo	Operação onde são utilizadas
distâncias	inclinadas	planimetria + nivelamento
	horizontais	planimetria
	Verticais (desníveis)	nivelamento
ângulos	horizontais ou azimutais	planimetria
	verticais ou zenitais	planimetria + nivelamento

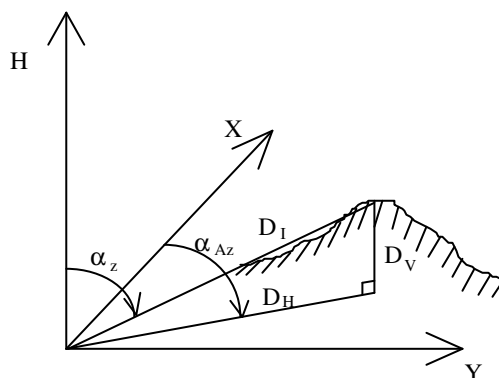


Figura 2.1 - Medições a efectuar nos levantamentos

No entanto, é importante salientar que no contexto do tipo de medições, o sistema GPS consiste numa excepção à regra. Neste sistema, como resultado do processamento das medições obtêm-se vectores de posição relativa (dx , dy , dz), os quais têm uma relação directa com as medições de distância, azimutes e distâncias zenitais.

As medições podem também ser divididas, quanto à forma de as obter, em duas categorias; isto é, elas podem ser divididas em *medições directas* e *medições indirectas*.

A medição directa surge quando se mede directamente a grandeza que se pretende obter (ex: medição de uma distância com fita métrica), a medição indirecta surge quando a grandeza que se pretende é obtida a partir de uma outra grandeza medida (ex: medição de uma distância com um distanciómetro, obtida a partir da comparação de fase de uma onda electromagnética ou a partir do tempo de percurso de um impulso), ou ainda, quando o valor final da medição resulta de algum tratamento numérico sobre a medição directa efectuada, como seja, a correcção de erros associados às medições.

Para a designação de medição é usado com frequência a designação de *observação*, termo esse usado também por nós mais à frente neste mesmo contexto de medição. Para estabelecer entre nós a diferença dos termos, podemos considerar a *observação* como o acto de observar ou medir uma dada grandeza usando o equipamento apropriado, incluindo em si as operações preliminares da própria mediação. Ao respectivo valor numérico que resulta da observação, designamos por “observável” ou “medida”, ou simplesmente, mas de forma menos correcta, por observação.

Antes das medições propriamente ditas há que definir a configuração geométrica do esqueleto de levantamento, atendendo: 1) à morfologia do terreno; 2) ao equipamento a utilizar; 3) à escala cartográfica; e, 4) à área de levantamento.

Em relação à definição da configuração geométrica, podem-se referir duas operações preliminares inseridas na operação topográfica de reconhecimento, escolha e implantação, são elas:

- a) materialização dos pontos de apoio;
- b) definição de visadas.

a) Materialização dos pontos de apoio

A forma e o tipo de materialização dependem da importância dos pontos, assim como da sua localização. Quanto à importância dos pontos de apoio, eles dividem-se entre redes geodésicas, redes de apoio topográfico e redes de triangulação cadastral. No que toca à localização, os vértices pertencentes às redes nacionais ou de triangulação cadastral, situam-se em zonas elevadas fora da área de levantamento, pelo que não podem, normalmente, ser utilizados no levantamento de pormenor. Os pontos ditos de apoio à execução do levantamento de pormenor devem situar-se no interior da área de levantamento e, caso não seja usado o GPS na ligação à rede geodésica, estes devem permitir a intervisibilidade com os vértices da rede geodésica.

redes locais de apoio	redes geodésicas e topográficas	- marcos geodésicos;
		- elementos proeminentes em construção estáveis;
		- marcos ao nível do solo (permanentes);
	pontos para levantamento de pormenor	- marcas provisórias do solo (estacas, pregos, etc...);
		- pontos notáveis do terreno ou de estacionamento momentâneo (sem sinalização específica);

Redes geodésicas

rede de 1ª ordem: formada pelo número mínimo de vértices necessários para varrer todo o território, formando uma triangulação de lados com comprimentos em média 30-40 Km podendo atingir os 100 Km. Os vértices são materializados por torres que suportam um pilar;

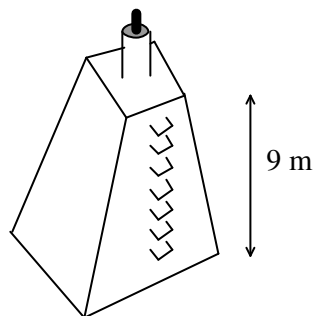


Figura 2.2 – Marco geodésico constituído por uma Torre

rede de 2ª ordem: são redes de adensamento com lados de 20-30 Km constituída por pilares circulares ou marcos, os "Bolembreanos", que se podem encontrar no solo, em cima de moinhos, depósitos de água e terraços, etc;

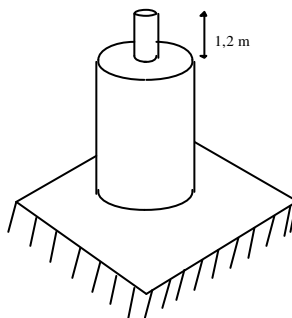


Figura 2.3 – Marco geodésico constituído por um Bolembreano

rede de 3ª ordem: rede de adensamento local com lados de 4-5 Km podendo ir aos 10 Km. Estes pontos podem ser materializados também por bolembreanos, por torres de igrejas, antenas, etc.

Redes de triangulação cadastral ou apoio topográfico

rede de 1ª ordem (4ª ordem geodésica): redes de adensamento topográfico utilizadas no apoio ao cadastro e à topografia. Materialização por pequenos marcos ao nível do solo ou sobre construções, e ainda por outros elementos proeminentes sobre as construções. Os seus lados vão de 1,5 a 2 Km;

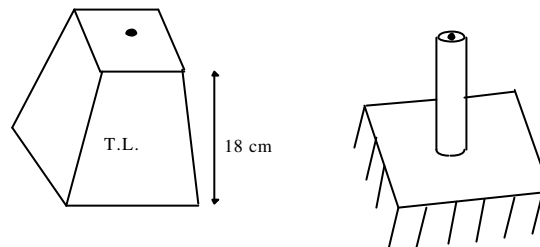


Figura 2.4 – Pequenos marcos

rede de 2ª ordem : constituída por marcos provisórios, estaca ou marcas cravadas no solo, com lados de 0.5 a 1.5 Km.

b) Definição das visadas

Uma visada é um segmento definido no espaço que une o ponto de coordenadas conhecidas - **ponto estação** e o ponto a coordenar - **ponto visado**. O ponto estação, como o nome indica, é o ponto onde é estacionado (pôr em estação) o instrumento de medida. Colocar um instrumento em estação constitui uma operação preliminar que obriga a um certo cuidado, pois da sua perfeição dependerá a definição rigorosa da visada, e consequentemente, a maior ou menor precisão na medida resultante.

O ponto visado é materializado por *alvos "naturais"* ou *"artificiais"*:

alvos naturais - marco, parte de construção já existente (antena, chaminé pára-raios, etc...);

alvos artificiais - são dispositivos estacionados sobre o ponto (colocados na sua vertical). Ocorrem quando o ponto no terreno não é visável;

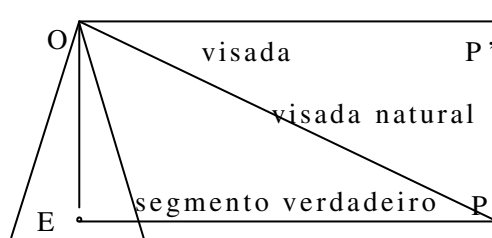


Figura 2.5 – Definição de visada

Em relação ao equipamento a utilizar nas medições do levantamento, há os instrumentos de medição propriamente ditos e os acessórios que possibilitam a concretização da medição com os seus requisitos. Os instrumentos de medição dividem-se essencialmente em três classes, os que medem ângulos - *teodolitos* ou *goniómetros*, os que medem distâncias - *distanciómetros electrónicos* e *taqueómetros*, e os que medem desníveis - *níveis*. Há ainda uma classe de instrumentos, que em conjunto com outros, ou por si só, possibilitam os três tipos de medição - *estações totais*, *taqueómetros auto redutores* e *os teodolitos com distanciómetros acoplados*.

A escolha do equipamento a utilizar no levantamento estará sempre dependente da precisão do levantamento (ϵ_L) exigida, dependendo esta da escala topográfica pretendida, pois $\epsilon_L \leq \epsilon_t = \epsilon_g * N$ - erro máximo tolerável, onde $\epsilon_g = 0,1$ mm é o erro de grafismo.

A qualquer instrumento de medição está sempre associada uma precisão (ou incerteza) da medição pelo facto dos instrumentos não serem ideais, ou seja, não conseguirem medir a mesma grandeza obtendo sempre o mesmo valor; devendo-se esse facto a diversos factores internos e externos ao instrumento (condições atmosféricas e operador).

Devido à sua precisão os aparelhos também se podem classificar em 1ª, 2ª e 3ª ordem. Temos por exemplo entre nós: Wild T3 - 1ª ordem ($\sigma_\alpha \cong 0,3''$); Wild T2 - 2ª ordem ($\sigma_\alpha \cong 1''$); e, Wild T1 e T16 - 3ª ordem ($\sigma_\alpha \cong 10''$). O aparecimento de teodolitos electrónicos não trouxe, de maneira alguma, melhorias ao nível de precisão, já que a sua inovação deu-se essencialmente dos sistemas de leitura e registo de dados que libertou o operador dessas tarefas, permitindo assim, uma maior fiabilidade nas observações.

Um dos critérios que pode ser utilizado para definir a precisão do levantamento é considerar $\epsilon_L = 2,6 \sigma_D$ e inferior ao erro máximo tolerável; onde 2,6 é o valor da semi-amplitude de um intervalo de confiança a 99,5% (distribuição Normal), e σ_D é o desvio padrão de uma distância ($\sigma_D^2 = p^2 + D^2 q^2$, p e q parâmetro de precisão do distanciómetro, ex.: $p = \pm 2$ mm, $q = 3$ ppm). Para que o valor estimado da precisão do levantamento tenha alguma confiança, deve-se considerar a maior distância medida e o instrumento menos preciso a utilizar. Assim para uma escala de 1/500 resulta um erro de levantamento $\epsilon_L \leq 5$ cm, donde terá que se garantir que as distâncias sejam medidas com um erro $\sigma_D \leq 1,92$ cm. Um outro critério, será o de considerar a precisão de levantamento igual ao menor erro de posicionamento dos pontos de pormenor em relação a um ponto de apoio

fundamental, usando a lei geral de propagação de erros para determinar (σ_x, σ_y) relativos a esses pontos, considerando-se pois, $\varepsilon_L = \max\{\sigma_{xi}, \sigma_{yi}\}$.

Não nos devemos esquecer que a precisão relativa do levantamento está intimamente ligada ao conceito de *carta regular*.

Com estes critérios é possível escolher o equipamento mais adequado para o levantamento de modo a garantir a precisão suficiente e necessária para a escala pretendida.

O estacionamento é uma operação preliminar importante no processo de observação, que ocorre sempre antes de efectuar qualquer medição. Colocar um instrumento em estação é, por um lado, colocar o referencial associado ao instrumento tanto mais próximo quanto possível do referencial no ponto que se vai estacionar e é, por outro lado, determinar a posição relativa de um referencial em relação ao outro.

O referencial no ponto a estacionar é definido por um sistema topocêntrico horizontal, ou seja um sistema cujo plano primário é o plano do horizonte e o plano secundário é o plano que contém a vertical do lugar e tem a direcção do Norte Cartográfico, resultando assim o eixo origem da contagem dos ângulos horizontais. O segundo eixo horizontal é colocado de modo que o sistema seja dextrógiro (os ângulos contados no sentido horário). Fica assim definido o sistema de eixos tri-ortogonais associado ao ponto estação.

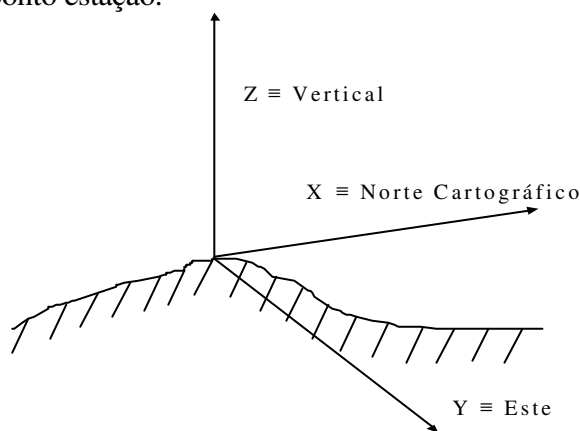
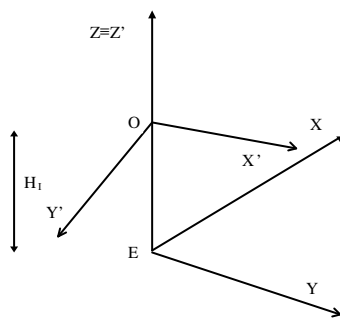


Figura 2.5 - Referencial local, topocêntrico-horizontal

Em relação aos instrumentos de medida, identifica-se sempre um sistema de eixos de referência, devendo-se, contudo, fazer alguma distinção entre os vários aparelhos. Enquanto que nos teodolitos é necessário que os planos primário e secundário do seu sistema de referência associado estejam bem definidos, já em relação aos níveis apenas interessa definir o plano primário e consequentemente o seu eixo principal que lhe é perpendicular. Em relação aos distanciômetros, interessa apenas que o centro do instrumento (centro de fase em relação ao qual é definida a medida) seja colocado na vertical do lugar.



H_1 - altura do aparelho acima do ponto de estação. Será medido por fita métrica no caso do instrumento assentar num tripé ou num outro mecanismo de suporte, ou será conhecida por construção caso a origem não coincida com a base do instrumento e esta assentar sobre o ponto de estação.

Figura 2.6 - Posição dos referenciais na operação de estacionamento do instrumento.

As condições ideais de estacionamento são as que fariam coincidir o referencial do instrumento com o referencial local de origem no ponto de estação:

$OZ' = \text{eixo principal do instrumento} \equiv \text{vertical do ponto estação} = EZ$

$X'OZ' = \text{plano primário do instrumento} \equiv \text{horizontal de E} = XEZ$

$OX' = \text{direcção de referência azimutal} \equiv \text{eixo das abcissas do sistema} = EX$

Ou seja,

$$O \equiv E, OZ' // EZ, OX' // EX$$

Na prática o estacionamento comporta três fases:

- 1º) Horizontalização do plano XOY, o que equivale a verticalizar o eixo principal, operação designada por "nivelar o instrumento" ou "calagem do instrumento";
- 2º) Tornar as origens dos sistemas coincidentes ($O \equiv E$). Embora, não seja uma operação totalmente conseguida na prática, ela é aproximada através da translação do centro O de modo a situar-se no eixo EZ, ou seja, colocar o centro O do instrumento na vertical do ponto de estação E, implicando a medição da sua altura.
- 3º) O referencial do aparelho é rodado em torno da vertical de modo que os eixos fiquem paralelos ao sistema convencionado no terreno. Esta operação conhecida por orientação do instrumento nem sempre é necessária.

Podemos identificar os vários elementos constituintes do equipamento que intervêm em cada uma das fases, dividindo-os em elementos de suporte e elementos auxiliares ou acessórios. O quadro que se segue faz essa divisão e identifica cada um desses elementos.

Calagem	suportes	tripés de pés extensíveis
		triângulo de parafusos nivelantes ou calantes
		alidade
	auxiliares de calagem	nivela esférica (da base)
		nivela tórica (da alidade)
centragem	suportes	base tripé
	auxiliares de centragem	vista do operador (centro do prato do tripé)
		fio de prumo
		prumo óptico ou luneta de centragem
		cana de centragem ou prumo de vara
		prumo de feixe de raios LASER
	centragem forçada	base de encaixe ou fixação do instrumento
orientação	suportes	alidade
	auxiliares de orientação	parafusos de reiteration

A operação de estacionamento pode ser dividida de uma maneira geral, aplicado à instrumentação de topografia, em 7 fases. Contudo, nem todas as fases podem ser possíveis de executar em certos instrumentos, por não possuírem os elementos respectivos, ou ainda, por não serem necessárias ou não terem significado.

Essas fases são:

- 1- centragem grosseira (tripé);
- 2- calagem aproximada (nivela de base);
- 3- centragem aproximada (fio de prumo);
- 4- calagem rigorosa (nivela da alidade);
- 5- centragem rigorosa (luneta de centragem);
- 6- verificação e correcção da calagem;
- 7- verificação da centragem.

No utilização de instrumentos auxiliares de colocação em estação destacam-se os dispositivos de horizontalização e calagem: *níveis* ou *nivelas de bolha*. Apesar de na tendência actual se verificar uma substituição destes dispositivos por sistemas de compensação automática (mono e bi-axial), estes dispositivos estarão sempre presentes na quase totalidade dos instrumentos que operam em condições de horizontalidade, pois os sistema automáticos necessitam sempre de uma pré-calagem.

As nivelas são constituídos por um recipiente de vidro parcialmente preenchido por um líquido muito volátil, geralmente álcool + éter, sendo o restante espaço preenchido pelo vapor do próprio líquido, formando uma bolha.

A forma do recipiente pode ser esférica ou tubular (tórica ou barrilete). No caso mais comum das nivelas tóricas, os tubos são secções de toros de revolução com círculo de gola de 20 a 100 metros para os instrumentos topográficos. Nos níveis mais precisos, de aparelhos de geodesia e astronomia, existe na extremidade do tubo uma câmara de compensação a qual permite, através do deslocamento do líquido de uma câmara para a outra, aumentar ou diminuir o tamanho da bolha. A bolha gasosa, devido à sua menor densidade ocupará a parte mais alta do tubo, podendo os seus deslocamentos serem medidos numa escala graduada ao longo da linha média (secção normal segundo o plano perpendicular ao eixo de revolução do toro, que passa pelo centro de curvatura).

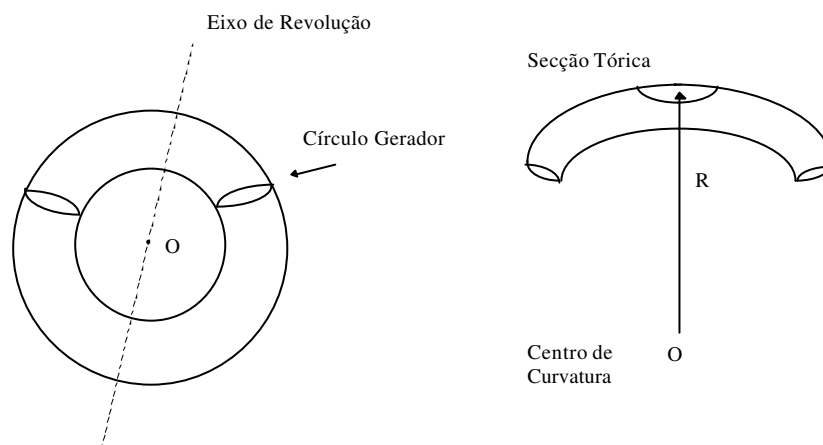


Figura 2.7 - Toro de revolução

Nos níveis mais precisos existe uma escala, que pode estar graduado ou não, cuja menor divisão é normalmente de 2mm; nos níveis menos precisos apenas existem dois ou mais traços de enquadramento da bolha.

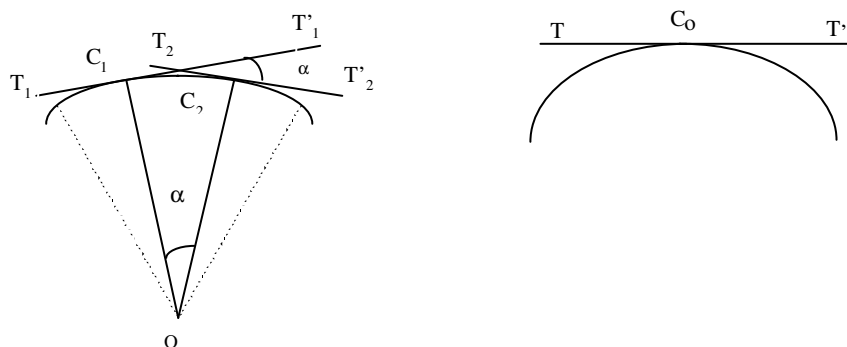


Figura 2.8 - Ângulo de sensibilidade e directriz do nível (TT')

Relativamente à Figura 2.8, α é o ângulo que denomina a *sensibilidade do nível*, correspondendo o deslocamento da bolha de uma divisão (2mm) à variação de inclinação da directriz do nível de valor α .

Em topografia : T16 $\rightarrow \alpha = 30''$
 T2 $\rightarrow \alpha = 20''$

Em geodesia: T3 $\rightarrow \alpha = 6,5''$
 T4 $\rightarrow \alpha = 1 \text{ a } 2''$
 DKM3 $\rightarrow \alpha = 2''$

Uma nivela está calada (ou a bolha está calada) quando o centro da bolha coincide com o centro da nivela.

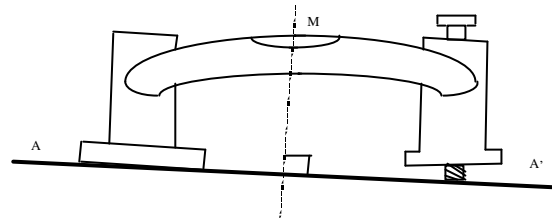


Figura 2.9 - Nível com parafuso de rectificação

Seja [AA'] a linha de apoio da nivela, onde o eixo do nível OM lhe é perpendicular e seja, [TT'] a *directriz* da nivela. Se $AA' // TT'$ então, quando a nivela estiver calada ($C \equiv C_0 \Leftrightarrow TT'$ horizontal) a linha de apoio estará horizontal.

Diz-se então que, uma nivela está rectificadora quando $TT' // AA' \Leftrightarrow TT' \perp OM$, ou de um outro modo, uma nivela está desrectificada se:

- a directriz não está paralela à linha de apoio
- estando a bolha calada, a linha de apoio não está horizontal
- estando a linha de apoio horizontal, a bolha não está calada.

Na prática, verifica-se que está desrectificada, quando a bolha se encontra calada numa dada posição e descalada na posição inversa (rotação da alidade de 180°).

2.1 Medições

Todas as medições a efectuar deverão ser referidas ou possíveis de ser reduzidas ao referencial associado ao ponto estação.

Num sistema tridimensional, os ângulos que definem uma direcção são dois: o *ângulo horizontal ou azimuthal* medido sobre o plano horizontal e contado no sentido horário a partir do

eixo origem de referência; e, o *ângulo vertical (zenital ou altura)* medido sobre o plano vertical que contém a direcção e contado a partir do plano horizontal se for altura, ou a partir da vertical (zénite) se for ângulo zenital.

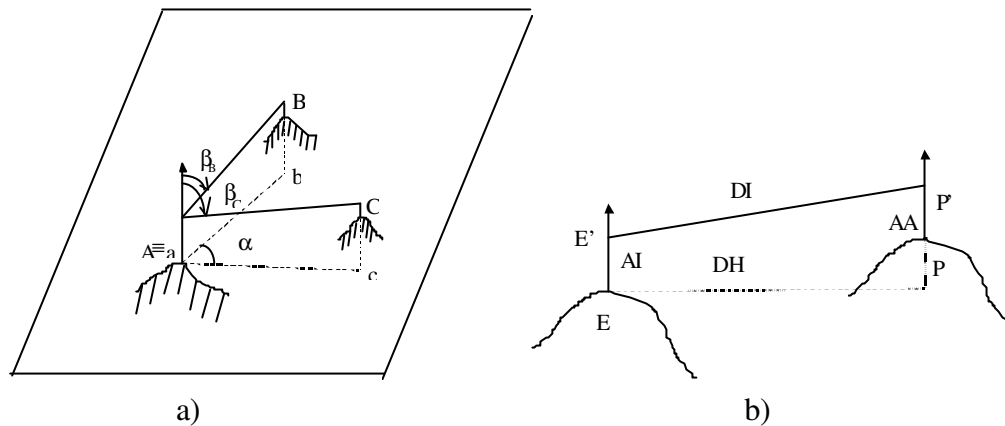


Figura 2.10 - a) Ângulos medidos no referencial topocêntrico; b) distância inclinada

As *distâncias inclinadas*, módulo do vector posição do ponto visado, serão reduzidas através do ângulo vertical às distâncias horizontais (componente horizontal), as quais permitirão o cálculo das coordenadas planimétricas (M,P), e às distâncias verticais (componente vertical) ou desníveis que permitem o cálculo da coordenada altimétrica (h). A única condição que se deve impor na medição de distâncias é que sejam medidas na direcção da visada ou numa sua paralela.

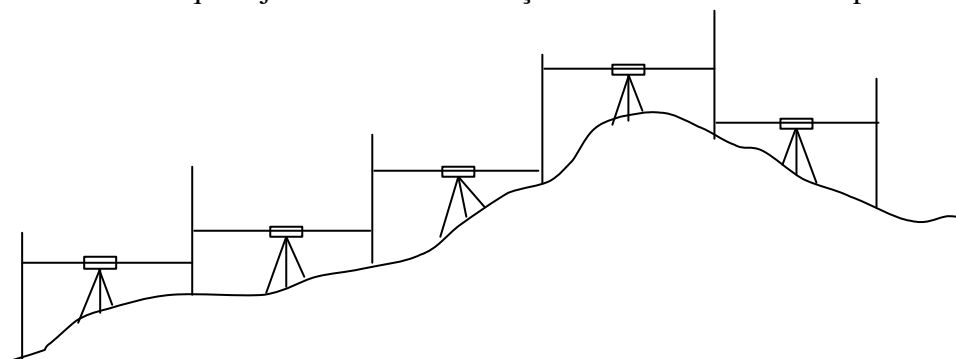


Figura 2.11 - Observação de desníveis pelo método de nivelamento geométrico

Os *desníveis* ou distâncias verticais podem também ser medidos directamente com os chamados níveis ópticos, que ao definirem um plano horizontal no ponto estação intermédio, permitem observar o desnível entre dois pontos equidistantes, visando duas réguas graduadas e colocadas na posição vertical sobre os pontos a cotar.

2.2 Aparelhos e Equipamento

2.2.1 Teodolitos ópticos

Os *teodolitos* são os aparelhos utilizados para medir os ângulos horizontais (azimutais) e verticais (zenitais). São constituídos essencialmente, por uma base que contém o limbo horizontal (círculo graduado de 0° a 360° que permite as leituras angulares) e uma alidade (parte giratória que roda em torno do eixo principal do aparelho) na qual se encontra a luneta que gira em torno do eixo dos munhões ou eixo secundário, sendo este por sua vez, suportado por dois montantes, num dos quais se encontra o limbo vertical.

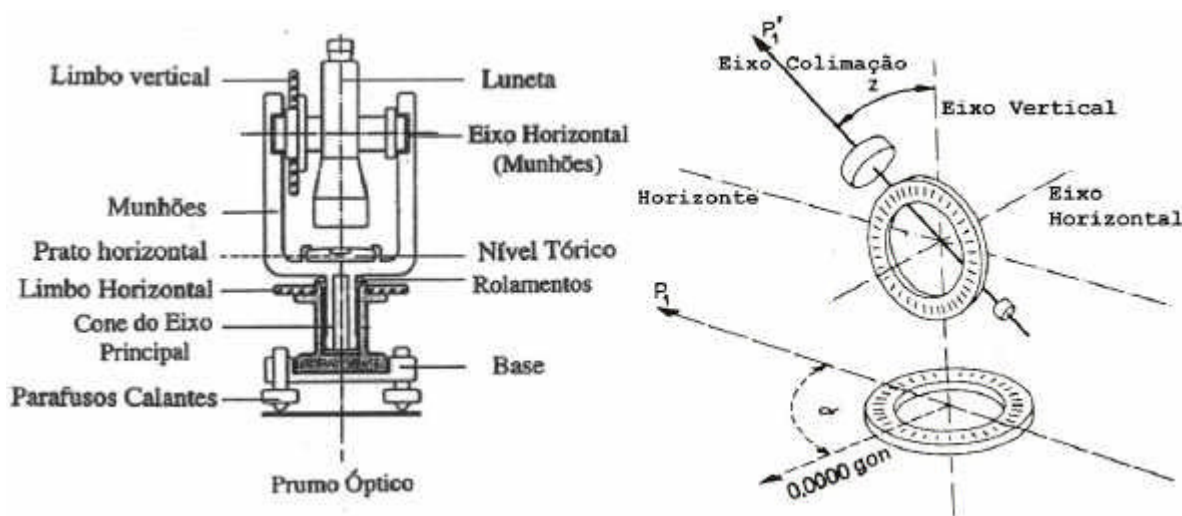


Figura 2.12 - Estrutura e esquema de um teodolito.

Os suportes dos teodolitos devem ser adequados. Se o ponto a estacionar é definido sobre um pilar, o teodolito pode simplesmente ser estacionado sobre ele, para medições não muito precisas, ou através de dispositivos de centragem forçada, para as observações de maior rigor. Se o ponto estiver ao nível do solo devem-se, então, utilizar os tripés de estacionamento topográfico, com hastes extensíveis. Nos pontos visados, se não existirem alvos naturais, devem ser colocados sobre eles alvos artificiais que possibilitam definir com rigor a direcção da visada, colocados também, sobre marcos ou tripés. Os alvos artificiais devem também estar munidos com dispositivos de centragem e calagem.

Os teodolitos devem verificar as seguintes condições:

1. O plano do limbo azimutal deve ser horizontal e o eixo principal (eixo de rotação da alidade) deve-lhe ser perpendicular;
2. O plano vertical formado pelo basculamento do eixo óptico da luneta em torno do eixo dos munhões (secundário) deve conter a vertical do ponto estação.

Desta forma ficam definidos os *planos primário e secundário* do referencial associado a esse ponto.

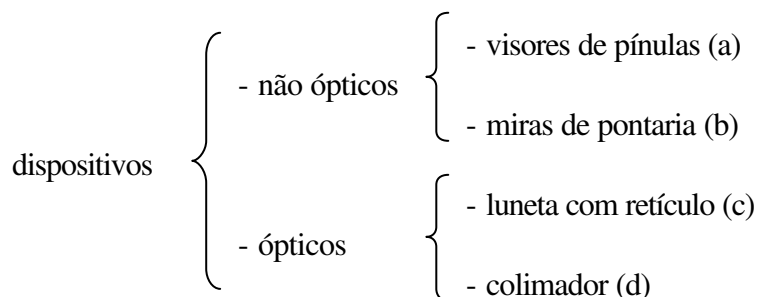
É possível assim, obter a medição correcta e quase exacta dos ângulos a menos de pequenos erros instrumentais por impossibilidade de construção perfeita e ideal dos teodolitos.

Identificam-se portanto, três eixos no teodolito, são eles o *eixo principal* - eixo de rotação e simetria da alidade, o *eixo secundário* - eixo de rotação da luneta e o *eixo de colimação* - eixo perpendicular ao eixo secundário e que passa pelo cruzamento dos fios do retículo da luneta (fios no interior da ocular que definem a pontaria). Este último eixo, quando basculado em torno do eixo secundário define o chamado *plano de colimação*. Por construção, o eixo de colimação deve coincidir com o eixo óptico da luneta (eixo que passa pelo cruzamento dos fios do retículo e pelo centro óptico da luneta); quando não coincidirem, existirá um ângulo de colimação que provoca um erro na observação dos ângulos azimutais. Estes três eixos devem verificar a perpendicularidade entre si de modo a respeitarem a ortogonalidade do sistema de referência.

A intersecção destes três eixos define o *centro do aparelho*, sobre o qual se deve conhecer a sua altura acima do ponto estação, medinda com fita métrica até à base do aparelho e adicionando-lhe depois, a distância da base ao centro do aparelho, valor este fornecido pelo construtor. A altura medida define completamente a posição do centro do aparelho em relação ao ponto estação, desde que o eixo principal do instrumento coincida com a vertical do lugar.

O extremo da visada no ponto estação será materializado pela intersecção de duas rectas: o eixo principal e a linha de pontaria ou eixo da visada, recta que existe no aparelho e cuja posição se pretende medir no referencial do instrumento. Em princípio o extremo da visada coincidirá com o centro do aparelho.

A linha de pontaria deve ser definida por dois pontos bem definidos que são identificados nos vários dispositivos:



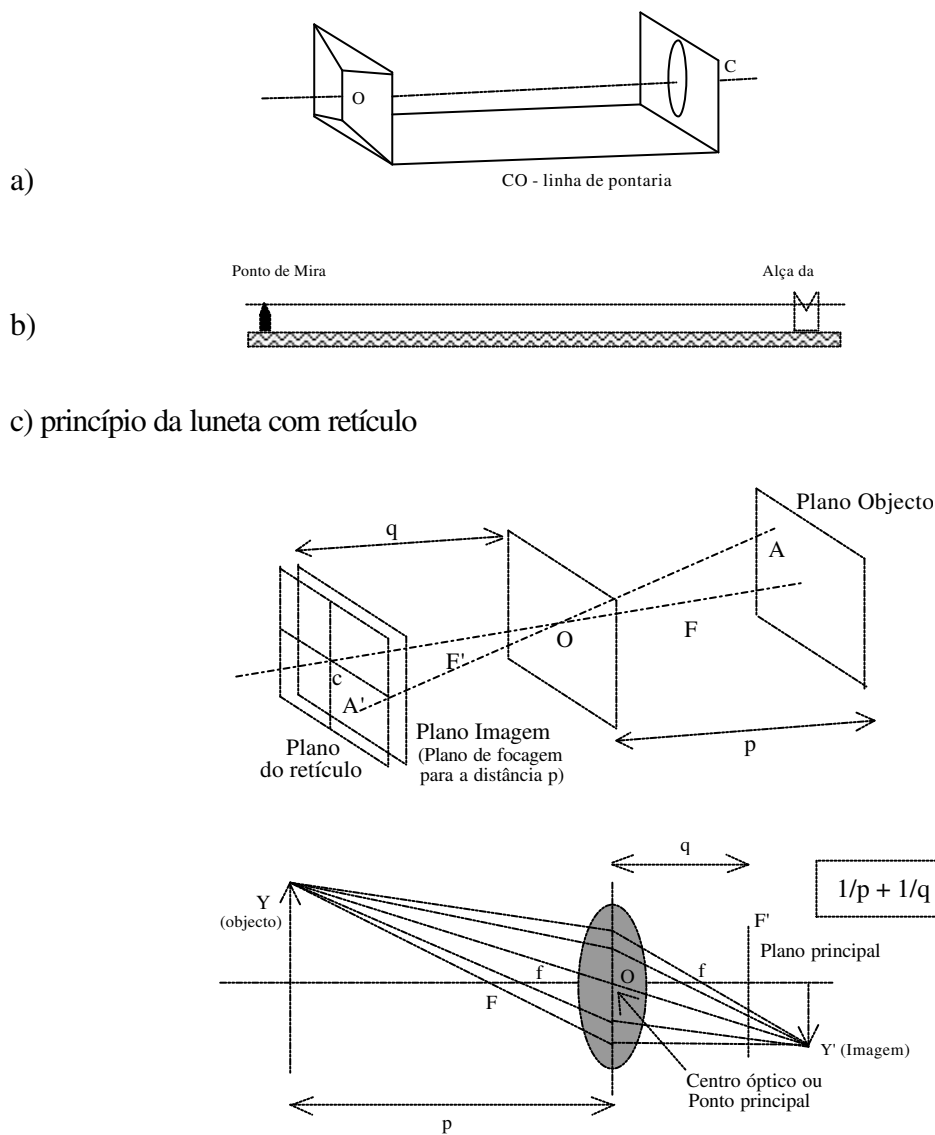


Fig.2.15 - Princípio das lentes convergente; f - distância focal O - centro óptico ou ponto principal; F' $\equiv$ ponto imagem de um objecto situado no eixo óptico a distância finita

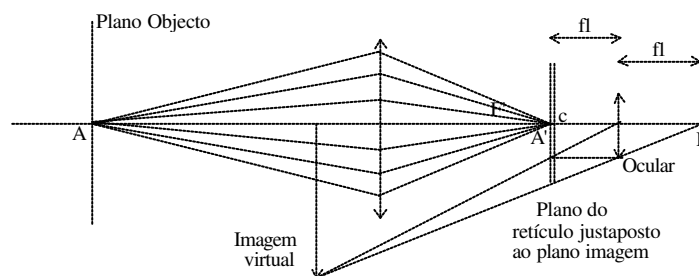


Figura 2.16 - Sistema óptico da luneta de pontaria

Uma luneta consiste num par de lentes convergentes centradas e paralelas, são elas, a lente da objectiva com uma maior distância focal e a lente da ocular. A lente da objectiva produz uma imagem reduzida e invertida a qual é vista pela ocular. Os fios do retículo, que definem a linha de pontaria, são colocados numa plaqueta de vidro situada entre as duas lentes. Esta plaqueta é movida para a frente e para trás, através de um anel de focagem existente na ocular, de modo a colocar o retículo no plano de focagem. É ainda suportada por três a quatro parafusos de rectificação que a deslocam para cima, para baixo e para os lados de modo a ajustar e rectificar a linha de pontaria.

A *focagem* é uma operação importante pois dela resulta uma melhor ou pior pontaria. Deve-se focar em primeiro lugar os fios do retículo com o seu anel de focagem colocado na ocular, podendo-se usar uma folha branca à frente da luneta para individualizar a imagem do retículo. Só depois é que se deve focar a imagem do campo visual, de tal modo que as duas imagens, a do retículo e a imagem do campo, deixem de se mover uma em relação à outra. Quando isto acontece, verificar-se-á a justaposição dos planos da imagem e do retículo. Na situação de haver movimentação das imagens, significa que foi introduzido um ângulo de paralaxe o qual pode provocar um erro na pontaria. Este plano do retículo será sempre o mesmo para qualquer imagem.

À luneta está associada uma *ampliação* (G), que é a razão entre o ângulo sob o qual é visto o objecto através da luneta e o ângulo de visão à vista desarmada.

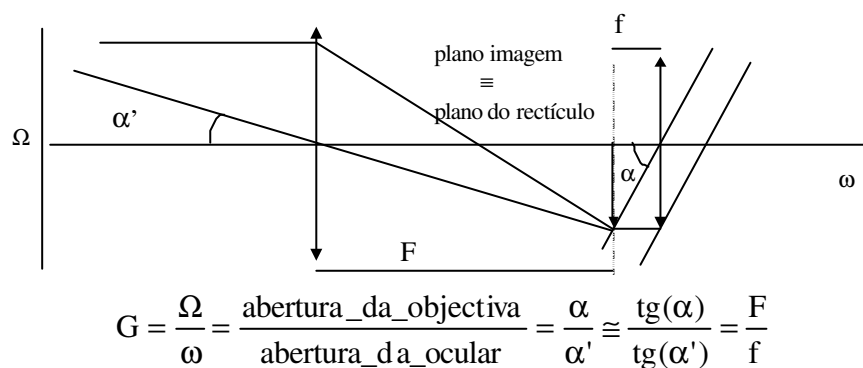


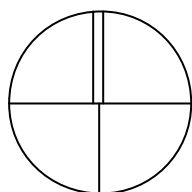
Figura 2.17 - Poder de ampliação da luneta.

As lunetas utilizadas nas observações topo-geodésicas têm um poder de ampliação que pode ir de 15 a 50 vezes.

O *campo visual* é o espaço cónico gerado pelo ângulo de abertura, que para a luneta de observação topo-geodésica varia entre 1° a 2°.

A *resolução* ou *poder separador* é um outro parâmetro que define a capacidade de separação da imagem de dois pontos objecto distintos. Para a vista é 2' (centígrados) para as lunetas é de 2'/G.

Os retículos mais usados nos teodolitos são os do tipo da Figura 2.18, onde o fio vertical é dividido num fio simples, para pontarias do tipo de bissecção ou sobreposição e por um fio duplo, para pontarias de enquadramento.



fio horizontal → pontarias verticais

fio vertical → pontarias horizontais

Figura 2.18 - Imagem do retículo

A precisão para as pontarias de sobreposição é de $\sigma = 100''/G$ a $60''/G$ e para as pontarias de bissecção e enquadramento de $\sigma = 60''/G$ a $30''/G$.

d) Os colimadores são lunetas com retículo, focadas para o infinito, que servem para aferir a posição centrada dos fios do retículo de lunetas de instrumentos de observação.

Os dispositivos de registo e leitura são componentes que permitem a quantificação da observação. Existem nos teodolitos dois limbos, ou círculos graduados, um horizontal e outro vertical que permitem as medições dos dois tipos de ângulos. O círculo horizontal está situado na base, com um parafuso que o pode fazer rodar (parafuso reiterador), para o caso dos chamados teodolitos *reiteradores*, ou ora fixo à base ora fixo à alidade, para o caso dos teodolitos *repetidores*. Estes círculos podem ser graduados nos sistemas sexagesimal (grau, minuto, segundo) ou centesimal (grado). São normalmente feitos de metal ou vidro para os aparelhos mais precisos, ou de plástico para os de menor precisão. O fabrico destes círculos recorre à gravação da graduação por contacto (justaposição) a partir de um disco original, o padrão (*master*). Os traços da graduação têm espessura de alguns micrones ($\mu m = 10^{-6} m$).

A influência de possíveis erros na subdivisão torna-se menor para os círculos de maior diâmetro. É por isso que o diâmetro dos círculos é considerado, muitas vezes, como indicador de precisão nos teodolitos. O diâmetro destes círculos anda normalmente entre 6 a 10 cm, podendo ir aos 25 cm nos instrumentos de observação astronómica; com subdivisões de 25' a 30' para instrumentos de topografia e 4' a 10' para geodesia. A precisão de leitura aumenta com dispositivos de interpolação e estimação entre traços de graduação, como sejam nónios, os microscópios ópticos ou scanners electrónicos.

A graduação do círculo original e a cópia dos círculos nunca são feitas de forma ideal; pelo que, são introduzidos no processo de fabrico erros de má graduação, ou seja, a subdivisão resultante dos círculos não é uniforme. Isto significa que resulta desta forma uma variação, quase periódica, entre a divisão real e a divisão ideal. Embora, a amplitude destes erros seja pequena, é conveniente e aconselhável que os ângulos que se pretendam de maior precisão sejam medidos repetidamente

em diferentes partes equidistantes do círculo, de modo a minorar a influência destes erros (ver método de reiteração e repetição).

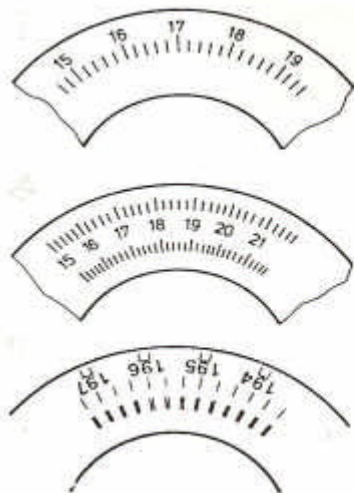


Figura 2.19 - Círculos graduados de teodolitos de leitura óptica.

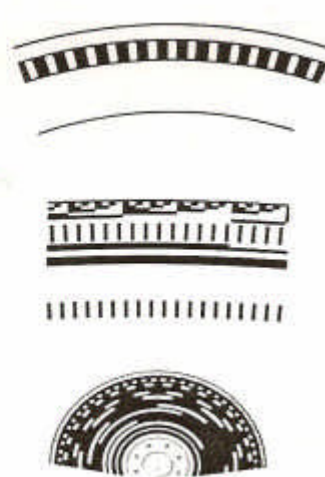


Figura 2.20 - Círculos de teodolitos com leitura electrónica por scanner.

Os círculos verticais são do mesmo material que os horizontais e com subdivisão semelhante, contudo, são relativamente mais pequenos. Enquanto que o círculo horizontal permanece estacionário durante a rotação da alidade na operação de medição de ângulos, o círculo vertical está fixo ao eixo secundário e roda juntamente com a luneta. Ou seja, enquanto que nos círculos horizontais é o sistema de leitura que roda e o círculo fica fixo, no círculo vertical é o círculo que roda e o sistema de leitura fica fixo.

Porque os ângulos verticais são referidos à direcção do zénite, a referência de leitura e o centro do círculo devem formar uma linha paralela à vertical do lugar. Para que tal seja conseguido, existe uma nivela acoplada ao dispositivo de leitura, que quando calada, torna aquela linha vertical. Quando esta nivela não se encontra rectificadora, vai originar a existência de um erro, designado por *erro de índice* ou *erro de colimação vertical*. Ele existe, quando as leituras correspondentes às posições directa e inversa da luneta, desfasadas de 180° e depois de se ter calado a nivela para cada leitura, diferem nos seus valores. A calagem da nivela deve ser feita sempre imediatamente antes de cada leitura com ajuda de um parafuso calante situado no montante que comporta o sistema. Os aparelhos mais recentes já estão equipados com referências automáticas, onde um compensador, por acção da gravidade, coloca a referência na sua posição correcta, são os chamados *sistema de compensação automática*.

Nos teodolitos de leitura óptica, os dispositivos auxiliares podem ser então, os nónios e os microscópios ópticos com micrómetro.

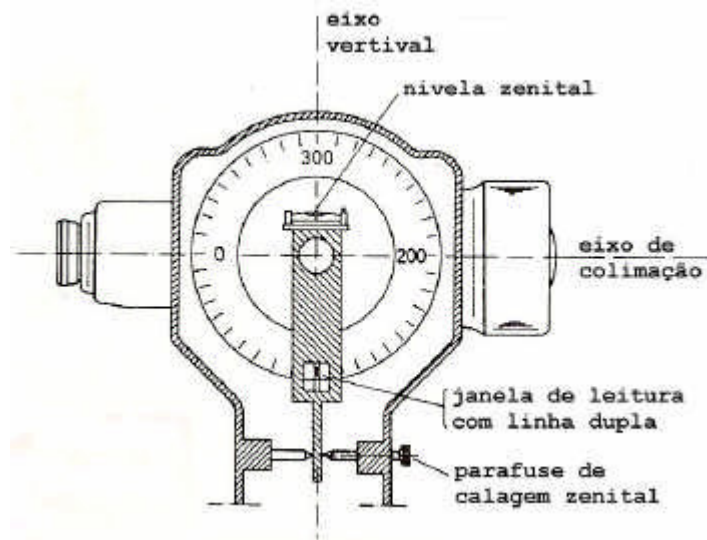


Figura 2.21 - Círculo vertical

Os nónios são graduações auxiliares que têm como suporte um disco fixo à alidade, cuja graduação se justapõe à graduação do limbo de modo a permitir uma estimação correcta da sub-unidade, divisão abaixo da menor divisão do limbo. O princípio do nónio baseia-se em **n** unidades do nónio N corresponderem a **n-1** unidades do círculo C de modo a que $(n-1)C = nN$. A diferença $C-N = C/n = a$ é a chamada *constante do nónio*. Se a linha **p** do nónio coincide com a primeira linha da graduação do círculo então o valor correspondente à estimação da sub-unidade é **p*a**.



Figura 2.22 - Nónio

Da figura lê-se, tomando como referência o traço "0" do nónio, $61^{\circ}20'$; ora $a=20'/20=1'$, o traço coincidente é o 7 logo o valor a retirar do nónio é $7*1'=7'$, donde a leitura final é $61^{\circ}27'$.

Os microscópios ópticos de leituras são, essencialmente, dos seguintes tipos:

- microscópios com traço de referência de leitura
- microscópios com escala de referência de leitura
- microscópios com traço de referência e micrómetro óptico
- microscópios de coincidência com micrómetro óptico

Enquanto que os três primeiros recorrem apenas a uma única leitura numa zona do círculo, o microscópio de coincidência permite uma leitura simultânea em duas zonas diametralmente opostas do limbo.

Nos teodolitos modernos o sistema é visível através de uma única luneta paralela à luneta de pontaria do teodolito.

Neste tipo de sistemas, podem ocorrer normalmente duas situações: ou, na mesma ocular aparecem ambas as imagens dos círculos em simultâneo (horizontal e vertical) em visores diferentes e identificáveis, ou podem aparecer ambas as imagens em alternância, usa-se para isso um botão comutador. O microscópio não é mais do que uma luneta com uma lente objectiva de pequena distância focal, onde o plano imagem do microscópio suporta a referência de leitura, para o primeiro e segundo caso.

Nos dois últimos casos é utilizado um elemento adicional, duas lâminas de faces paralelas - micrómetro, que podem rodar em torno de um eixo, deflectindo a imagem da fracção de círculo observada, provocando um movimento aparente da graduação em relação à referência de leitura.

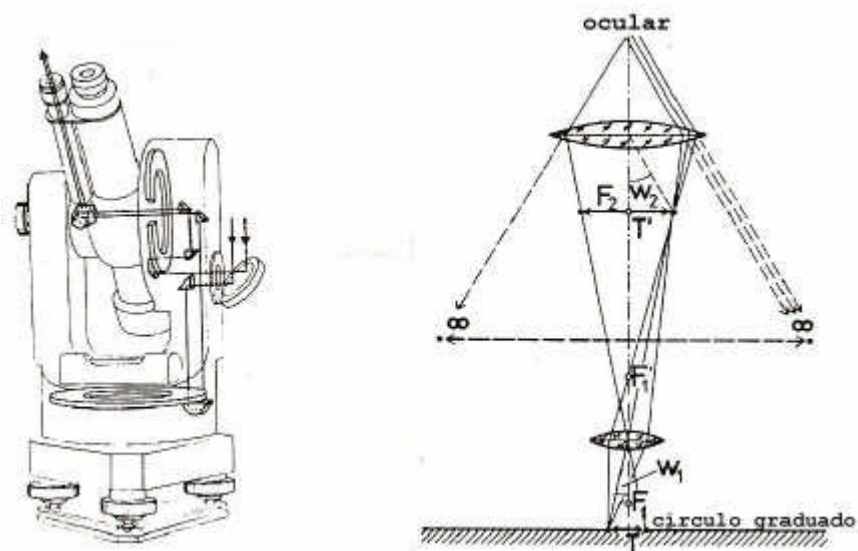


Figura 2.23 - a) percurso óptico no sistema de leitura única de teodolitos;
b) microscópio de leitura.

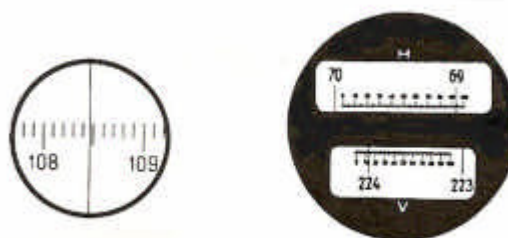


Figura 2.24 - Microscópios com traço e escala de referência.

A deslocação Δ da imagem do segmento infinitesimal do círculo (Fig.2.25) é aproximadamente proporcional à rotação α das faces paralelas. A imagem é movida até que o traço da graduação

coincida com o traço de referência. Esta translação Δ é lida em unidades angulares na graduação de um micrómetro associado e visível através de uma janela na ocular de leitura.

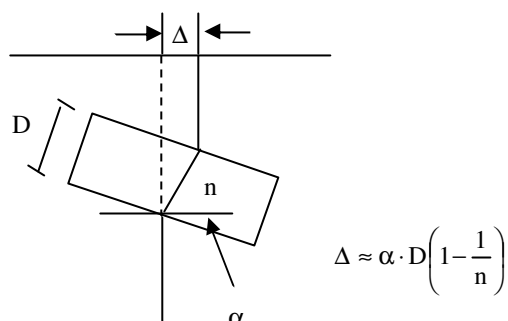


Figura 2.25 - Lâminas de faces paralelas usadas para deflectir o raio óptico nos micrómetros de leitura por coincidência.

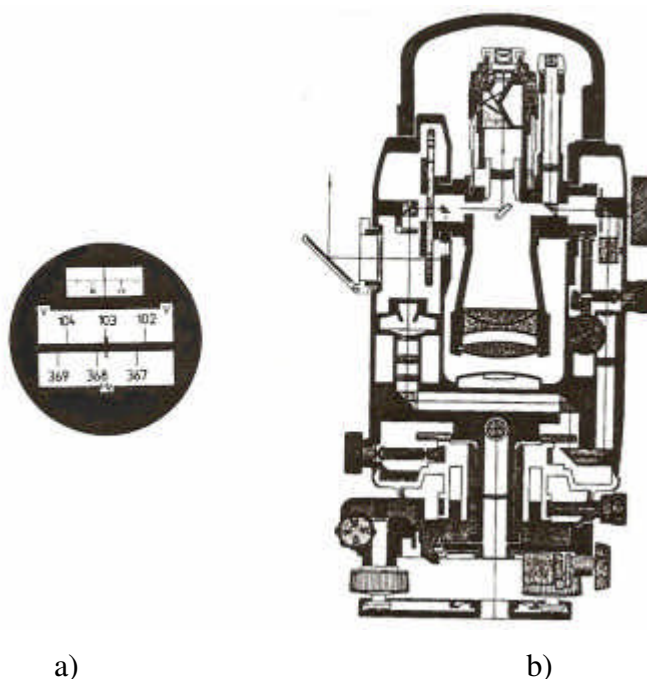


Figura 2.26 - a) microscópio com traço de referência e micrómetro óptico;
b) percurso óptico no sistema leitura com micrómetro.

O microscópio de leitura por coincidência foi construído pela primeira vez por Karl Zeiss. O princípio desta concepção óptica é a de combinar dois segmentos do círculo diametralmente opostos numa só imagem. Desde então, este é o sistema mais utilizado; dentro das várias razões para tal facto, salienta-se o de minimizar a influência de certos erros e anular completamente outros, como seja a excentricidade do limbo (ver erros instrumentais). Normalmente os traços da graduação dos dois segmentos são colocados de modo que as graduações deslizem uma sobre a outra em direcções opostas.

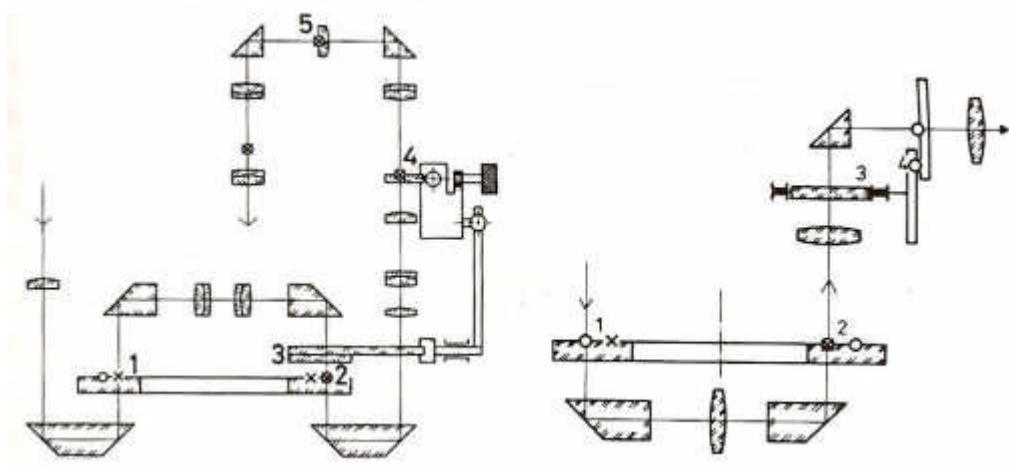


Figura 2.27 - Esquema óptico em teodolitos com sistema de dupla leitura e micrómetro óptico.

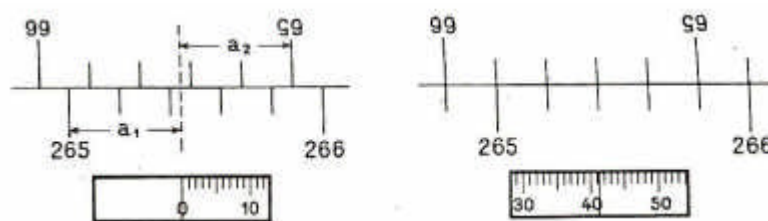


Figura 2.28 - Microscópio de coincidência antes e depois da operação de leitura.

2.2.2 Teodolitos electrónicos

Este tipo de teodolitos, os quais constituem a última geração, são muito semelhantes aos teodolitos ópticos quer na estrutura, quer nos princípios básicos de medição de ângulos. Ambos estão munidos de dois círculos graduados e centrados em relação aos seus eixos, de uma luneta de pontaria e observação da visada, de uma base e de uma alidade.

As grandes diferenças residem no sistema de leitura, registo e manuseamento de dados. Agora, todo este processo é feito por processos electrónicos e controlado por um microprocessador. Aliás, é o sistema de leitura que dá o nome aos dois tipos de teodolitos, um de leitura óptica e outro de leitura electrónica.

Nos teodolitos ópticos, a gradação dos círculos era composta por um determinado número de traços de subdivisão no sistema de base 10 (decimal), acompanhada de uma respectiva numeração, permitindo uma leitura óptica imediata e directa, por parte do observador. Enquanto que, os electrónicos apresentam uma divisão sob a forma de traços e/ou sob a forma de código, a qual quando lida electronicamente através de uma rasterização, transformando o conjunto de

código e traços em números do sistema binário, possibilita a aquisição do valor numérico relativo à direcção angular.

Verifica-se, portanto, a substituição dos microscópios ópticos por scanners electrónicos. Os círculos são do mesmo tipo de material, transparente (vidro ou plástico) com inscrição da graduação a preto.

A informação adquirida pelos scanners é conduzida a um microprocessador que armazena, trata e debita estes dados na forma digital. A inclusão de microprocessadores nos teodolitos, possibilita o interface com microcomputadores externos, utilizada para descarga de dados armazenados e ainda, o interface com distanciómetros electrónicos acoplados, formando as estações totais electrónicas como havemos de referir mais à frente. Saliente-se uma grande vantagem destes aparelhos face aos anteriores, subjacente ao que atrás foi referido, é a de permitir o armazenamento dos dados na forma de suporte magnético ou digital, através das cadernetas electrónicas, dos cartões de registo ou disquetes, ou mesmo até de mini-discos rígidos. Com estes dispositivos passa-se a dispensar o manuseamento directo e registo dos dados por parte do observador ou anotador em folhas ou cadernetas de papel, originando assim, uma maior garantia na validação dos dados adquiridos no campo.

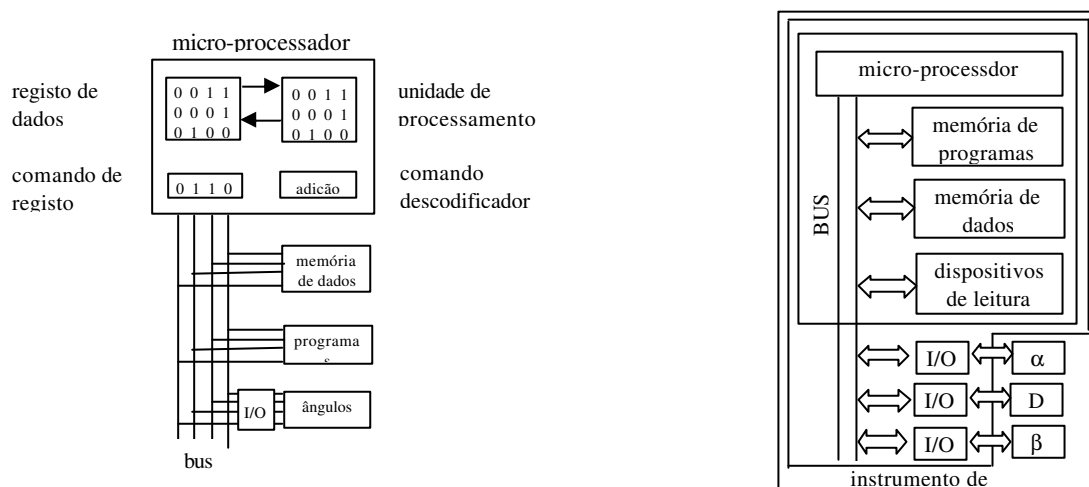


Figura 2.29 - Unidade de registo e processamento de dados dos teodolitos electrónicos

Vejamos mais em pormenor como se processa a leitura e registo de dados que possibilita a respectiva conversão nas grandezas angulares. Da mesma forma que nos teodolitos ópticos, os círculos graduados são de vidro sobre os quais é inscrita a graduação a preto. A leitura, e posterior registo, é feita à custa de um par de díodos infravermelhos, um díodo luminescente e um foto-díodo. A luz emitida por o díodo luminescente atravessa o círculo, e quando na ausência de traços ela é captada pelo foto-díodo, no caso contrário a luz esbarra contra o traço e deixa de ser captada. Estes dois estados, de captação e não captação de luz, são convertidos em estados de

passagem e não passagem de corrente eléctrica, ou valores de potencial eléctrico nulo e não nulo. Esses estados corresponderão aos dois valores (0,1) do sistema binário, que depois de interpretados pelo microprocessador são convertidos nos valores angulares na forma decimal.

O microprocessador representa a unidade central que controla e opera os instrumentos modernos de medição geodésico-topográfica e que, directamente influencia o seu modo de operação. O microprocessador é constituído por uma memória (*buffer*), uma unidade de registo e comando, uma unidade aritmética e uma unidade descodificadora.

Conversão analógico-digital de ângulos

Os ângulos medidos são inicialmente valores análogos, um conversor analógico-digital transformá-los-á em números binários de modo que possam ser processados pelo computador. Essa conversão analógico-digital de ângulos é baseada nos **métodos de código e de incremento**.

O método de código utiliza círculos com graduação na forma de código, em que a cada linha de graduação corresponde um sinal de código captado por conjuntos de vários pares de díodos, resultando para cada par de díodos um valor binário, que no seu conjunto formarão o valor angular.

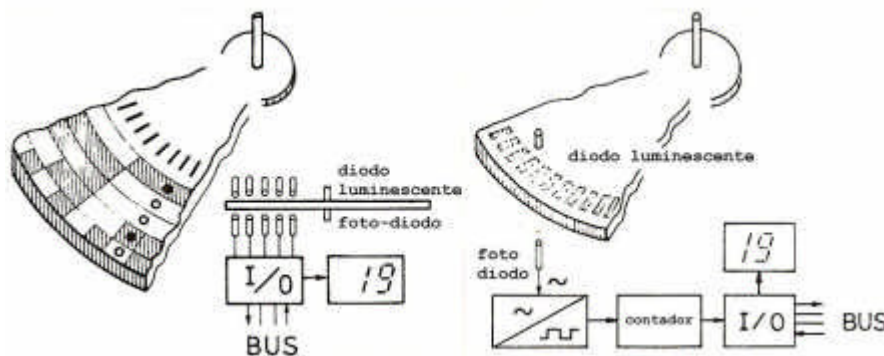


Figura 2.30 - Conversão analógico-digital

O método incremental utiliza círculos subdivididos por linhas ou traços radiais, que representam um acréscimo de uma série de campos de luz/não luz – incrementos. Quando se dá a rotação do círculo o sistema de díodos procede à contagem dos incrementos relativamente a uma referência interna do círculo. Este método não permite a determinação de direcções absolutas, mas apenas variações de direcção ou diferenças angulares, através da contagem dos campos (traços) entre as direcções, utilizando o sistema de scannerização.

Se o círculo graduado girar em torno do seu eixo, movendo-se em relação ao conjunto de díodos e com uma certa velocidade angular, então a radiação captada pelo foto-díodo resulta numa modulação de intensidade luminosa do tipo sinusoidal. A radiação captada é então convertida num sinal eléctrico, sendo depois o seu sinal-seno transformado num sinal rectangular através de uma

componente electrónica adicional. Um contador encarregar-se-á de contar o número exacto de períodos do sinal, gerados pela rotação.

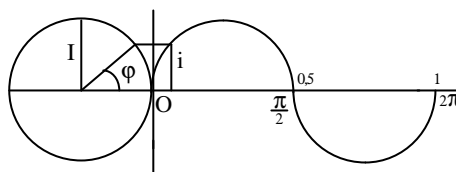


Figura 2.31 - Transformação do sinal-seno em sinal retangular.

Este sistema não permite a precisão suficiente e necessária para as aplicações geodésicas e topográficas. Por exemplo, um scanner de 2500 linhas num círculo de 70 a 100mm de raio, permite medições apenas com 0.16grad ($\approx 9'$) de precisão.

A precisão suficiente é alcançada com a introdução de *interpoladores electrónicos* e com leituras (scanners) diametralmente opostas.

Interpoladores electrónicos de média precisão

Os teodolitos de média precisão utilizam geralmente o método do incremento por scanerização dos círculos, para a determinação do valor grosseiro da medição (ex.: graus e dezenas de minuto), utilizando a contagem electrónica do número de períodos do sinal. O valor refinado (unidades de minuto e dezenas de segundo) é determinado com o recurso à medição de fase do sinal.

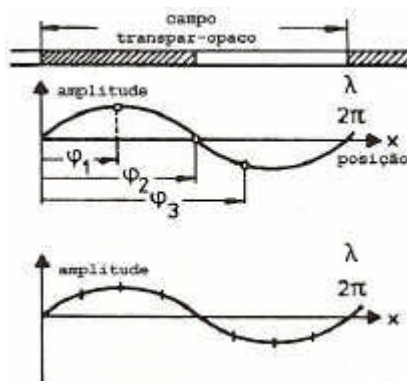


Figura 2.32 - Interpolação electrónica.

O comprimento do período do sinal é de 2π ou de λ (1 ciclo), onde as fases angulares ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ... representam fracções de 2π , correspondendo a todas os estados de oscilação. São estas fases angulares que permitem uma medição refinada, melhorando desse modo, a precisão obtida com a leitura grosseira pelo método do incremento.

A partir do campo, composto pelas bandas escura e clara, pode-se gerar um sinal de 2 períodos, usando para tal efeito, métodos especiais de processamento de imagem. Sobre cada período, um interpolador electrónico distingue 8 estados diferentes, ficando assim, cada campo

subdividido em 16 partes. Ampliando ainda, o número de intervalos da graduação por um factor de 32, atinge-se a resolução de 0.001grad ($\approx 3''$), para uma graduação de 12500 incrementos.

O microprocessador controla todas estas medições e gera o resultado final na forma digital.

Interpoladores de alta precisão

Estes interpoladores recorrem aos três métodos seguintes:

Método de coincidência - um sistema de medição electrónica provoca uma coincidência de linhas da graduação em posições simétricas (diametralmente opostas); permitindo assim, melhorar a precisão e eliminar possíveis erros de excentricidade do círculo.

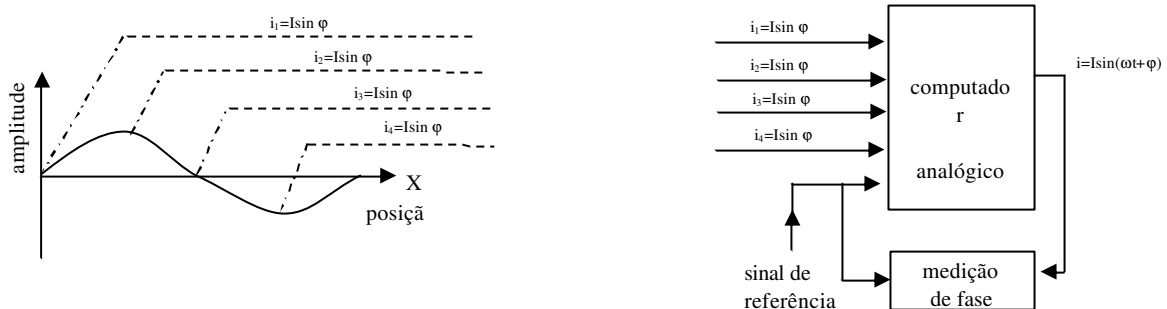


Figura 2.33 - Rasterização usando a comparação de fase

Método da comparação de fase - é uma aproximação do método incremental, em que é gerada uma comparação de fase em leituras parciais e sucessivas dentro de um período do sinal. Os círculos contêm uma dupla graduação de traços analógicos, uma interna e outra externa, situando-se entre elas uma graduação com traços de código que permite a leitura grosseira. Quando o círculo se encontra em movimento, cada traço analógico é secanizado por quatro pares de díodos igualmente distribuídos no intervalo de um período. São então, produzidos quatro sinais-seno electrónicos i_1 , i_2 , i_3 e i_4 , desfasados de 90° . Estes sinais são combinados num único sinal, que quando comparado em termos de diferença de fase com o sinal da direcção de referência obtido da mesma forma, resulta o valor refinado da direcção observada. A medição da fase ϕ do sinal, permite subdividir um intervalo da graduação (uma divisão) em 1000 partes.

Método dos interpoladores matemáticos - é um outro método baseado também no método do incremento. Usa um traçado com variação sinusoidal, através dos campos de luz/não luz; aqui um período é formado, não por um grupo de duas linhas, mas por um grupo de muitas linhas, o que estatisticamente se torna mais preciso. Ou seja, a graduação é formada por um traçado de Moire (Fig. 2.34). O traçado é observado através de quatro pares de díodos igualmente espaçados num período de Moire, os quais geram quatro sinais eléctricos desfasados de 90° . A fase do ângulo, que representa a posição do sistema de díodos, determina a leitura refinada.

Com os interpoladores de alta precisão, as direcções podem ser medidas com uma precisão de 0.1 a 0.2mgrad (0,3" a 0,6").

Pelo facto de neste sistema de leitura o círculo permanecer em rotação, só é possível ter acesso ao valor das leituras horizontais, quando o teodolito estiver completamente nivelado, isto para que a rotação do círculo seja feita sem qualquer atrito e para a própria segurança do sistema.

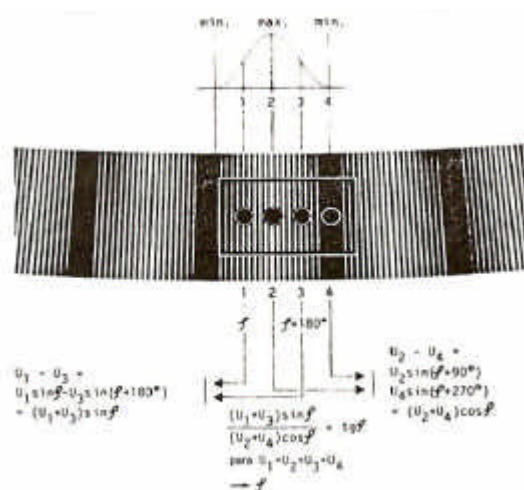


Figura 2.1

ca

À semelhança dos teodolitos ópticos, também é possível fazer a distinção entre teodolitos electrónicos de baixa, média e alta precisão, respectivamente com os valores de 10 a 20 mgrad (30 a 50"), 1 a 2 mgrad (3 a 6") e 0.1 a 0.2 mgrad (0.5") de precisão.

Relativamente à verticalização deste tipo de instrumentos, e como já tinha sido referido atrás, a tecnologia actual permitiu a introdução de sistemas de compensação automática, que após uma prévia verticalização do instrumento, liberta o operador dessa operação contínua anteriormente imprescindível e muito cuidada. Os aparelhos mais recentes, além da habitual calagem zenital automática incluem já sistemas de calagem azimutal com sistemas bi-axiais, isto é, calagem do plano primário segundo duas direcções ortogonais. Permitem ainda, a leitura interna do ângulo de desverticalização do eixo principal, com o objectivo de corrigir as observações angulares de visadas inclinadas. Este facto, além de possibilitar um aumento de precisão, permite que estes instrumentos possam ser utilizados em observações astronómicas.

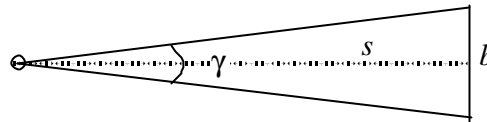
2.2.3 Distanciómetros

Até à década dos anos 60 a medição de distâncias era a operação mais difícil de executar com a precisão desejada. Eram utilizados os métodos taquiométrico (estadimétrico) e a medição directa, o primeiro era limitado pelas distâncias curtas, o segundo era feito com fita métrica ou com o agrimensor. Para medidas mais precisas, como sejam as bases geodésicas, era necessário recorrer à medição laboriosa com fios de invar.

O método taqueométrico baseia-se na dedução da distância a partir da resolução de um triângulo paralático, sendo por essa razão um método trigonométrico. Sabendo-se o ângulo

paralático, por leitura directa no teodolito ou taqueómetro (nome dado aos teodolitos munidos de traços estadimétricos no rectículo para a leitura directa do valor da distância), e a base do triângulo por leitura directa numa estadia ou régua graduada, determina-se a distância por

$$s = \frac{b}{2} \cot \frac{\gamma}{2}$$



Apareceram inicialmente os tulerómetros e mais tarde os geodímetros, recorrendo estes últimos à medição de feixes de luz visível. Finalmente pela década dos anos 70 apareceram os distanciómetros electromagnéticos (EDM – Electromagnetic Distance Measurment) que revolucionaram por completo a medição de distâncias, atingindo alcances de 15Km e precisões submilimétricas.

Podemos identificar dois grupos de instrumentos, os do tipo electrónico ou de micro-ondas e os do tipo electro-óptico que funcionam com raios Infra Vermelhos (IV) ou a Laser. E porque a distância medida com estes instrumentos depende da velocidade de propagação da luz no espaço, é necessário conhecê-la com grande rigor.

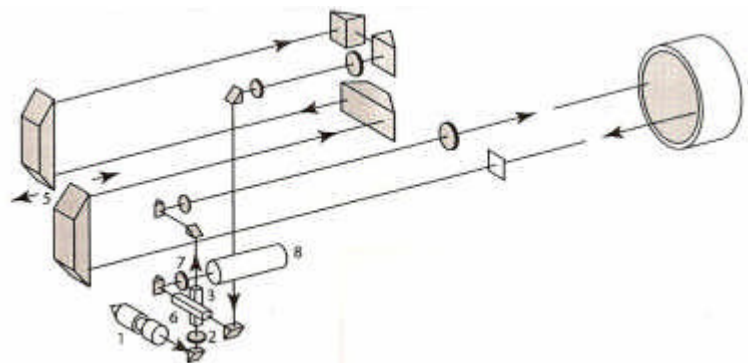


Figura 2.35 – Princípio óptico de um distanciómetro.

Essencialmente os instrumentos electro-ópticos de medição de distâncias são compostos por um transmissor para enviar uma onda contínua, reflectida num reflector de espelhos situado no extremo do segmento a ser medido, e um receptor colocado junto de emissor que capta a onda reflectida. Existem também aparelhos em que o emissor e o receptor são dois instrumentos distintos e colocados nos extremos do segmento a medir. A onda emitida, designada por onda portadora, é modulada e irá permitir a medição da distância por comparação de fase entre o estado de emissão e recepção.

As principais componentes dos instrumentos electro-ópticos são: uma fonte de luz visível, produzida por uma lâmpada de tungsténio ou um tubo de Xenon, ou então laser ou infra vermelho; um modulador; componentes ópticas para transmissão e recepção da onda modulada; um fotomultiplicador e um medidor de fase; e, uma unidade de leitura, que converte a medição de fase no

valor de distância. Adicionalmente, um sistema reflector constituído por um ou mais prisma de espelhos.

A escolha da frequência do sinal electromagnético é um problema nos sistemas EDM. O espectro electromagnético é contínuo e vai desde a luz visível com frequências da ordem de 10^{14} Hz, correspondendo ao comprimento de onda de 10^{-6} m, até aos grandes comprimentos de ondas rádio com frequências de 10^4 a 10^5 Hz, correspondendo ao comprimento de onda de 10^4 m.

É conveniente dividir os instrumentos actualmente utilizados em três categorias, dependendo da frequência da onda portadora:

- baixa-frequência com frequências portadoras de 10^5 a 10^6 Hz (comprimentos de 10^3 a 10^2 m);
- microndas com frequências portadoras de 10^{10} Hz (comprimentos de 10^{-2} m);
- luz visível e infra-vermelho com frequências portadoras de 10^{14} Hz (comprimentos de 10^{-6} m).

É sabido que os sistemas com sinais de baixas frequências possibilitam grandes alcances mas requerem transmissores mais potentes, sendo ainda afectados pela atmosfera o que leva a uma perda de precisão em relação aos sistemas de alta-frequência. Contudo, para aplicações de navegação aérea e marítima e para trabalhos de hidrografia, os grandes alcances são fundamentais, enquanto que a precisão é comparativamente inferior, daí se poderem utilizar nessas situações os sistemas de baixa frequência.

Para os instrumentos usados na topografia, na geodesia e em aplicações de engenharia os sistemas de alta-frequência são, de facto, os mais apropriados. Pois, podem ser de dimensões reduzidas e, por isso, mais fáceis de transportar; e a propagação do sinal através da atmosfera é muito mais estável. Contudo, com estas frequências é mais difícil de medir as diferenças de fase e os comprimentos de onda são tão pequenos que não podem ser utilizados directamente para medir as distâncias. A solução adoptada é a de modular a onda portadora de altas-frequências com uma onda de baixa frequência e usar a onda modulada para a medição da distância.

Alguns instrumentos usam uma modulação de amplitude, enquanto que outros usam a modulação de frequência, mas isso não é importante do ponto de vista do observador. Na modulação da amplitude, a amplitude da onda portadora é variável e oscila em torno do seu valor original de amplitude proporcionalmente à amplitude e à frequência do sinal modulador. A amplitude da portadora permanece constante na modulação da frequência, variando agora de forma contínua a sua frequência, proporcionalmente à amplitude instantânea e à frequência do sinal modulador. A modulação da fase pode ser descrito como um método indirecto da modulação da frequência.

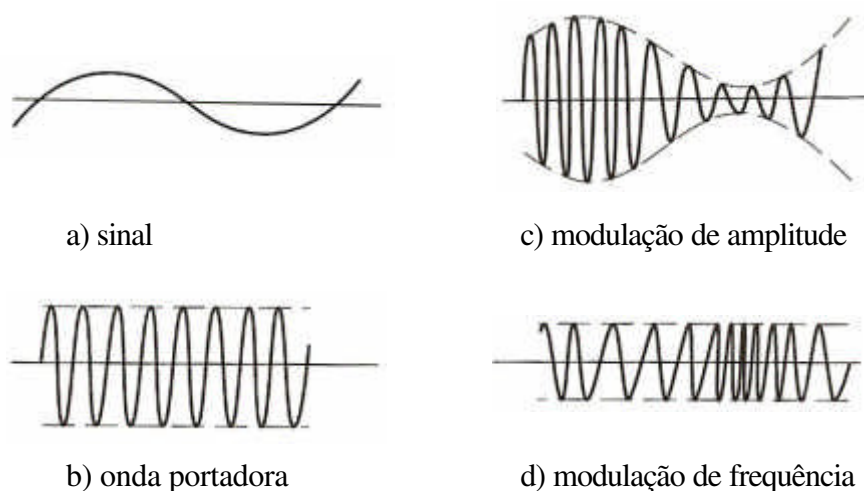


Figura 2.36 – Modulação de sinal.

Diferença de Fase e Medição de distâncias

Existem dois métodos possíveis para medição de distâncias com o recurso aos sinais electromagnéticos, o método do tempo de percurso de um impulso ou o método da medição da variação da fase do sinal. De certa forma a portadora não modulada pode ser considerada como sendo constituída por uma série de impulso, que são transmitidos de forma intervalada, permitindo assim a medição da distância, função do tempo de percurso e da velocidade de propagação. No entanto, quando é necessário a medição de distâncias com uma resolução de 0.01 m ou superior, é necessário aplicar aí o método da diferença de fase.

Considere-se um sinal transmitido com uma frequência f constante. Se o receptor se encontrar a uma distância d do emissor, então existirá uma diferença de fase entre a emissão do sinal e a sua recepção, medindo essa diferença poder-se-á então deduzir a distância entre o emissor e o receptor. De facto a diferença de fase dá-nos uma pequena fração do comprimento de onda, a qual não corresponderá à distância entre os dois elementos, a menos que, essa distância seja inferior ou igual ao comprimento de onda, obtendo-se como diferença de fase um valor $d\Phi \leq 2\pi$. Quer isto dizer, que além da diferença de fase, que nos dá uma parte residual da distância d , é necessário determinar o número de ciclos inteiros (comprimentos de onda) do sinal que vai do seu estado de emissão ao seu estado de recepção.

Como não é possível comparar instantaneamente a fase do sinal de um emissor e de um receptor que distam de uma distância d , os sistemas EDM adoptaram a técnica de reflectir de volta o sinal para o transmissor e fazer aí a comparação de fase. Resultando daí uma medição de $2d$ em vez de d .

A equação fundamental que relaciona a distância a medir com a medição de diferença de fase pode ser escrita por

$$d = n\lambda + \frac{\phi\lambda}{2\pi} + a$$

Onde, d é a dupla distância percorrida pelo sinal; λ é a modulação do comprimento de onda igual a $V_o / \mu f$; n é o número de comprimentos de onda inteiros correspondentes a d ; ϕ é a diferença de fase entre os sinais emitido e recebido; a é uma constante aditiva que corresponde à translação do centro de fase em relação ao centro geométrico do distanciômetro; V_o é a velocidade da onda electromagnético no vácuo; μ é o índice de refração; e f é a frequência.

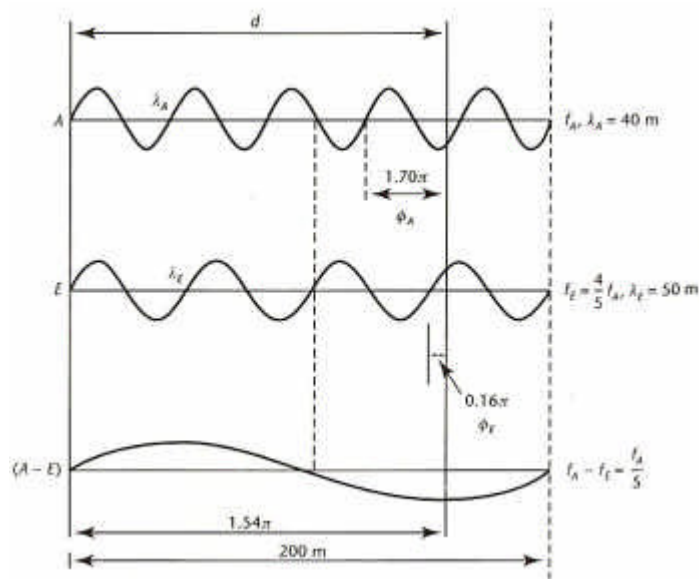


Figura 2.37 – Frequências das ondas portadoras não moduladas e respectiva diferença.

A variável n é inicialmente uma incógnita, pelo que, para determinar d é necessário repetir a medição de diferença de fase com um segundo sinal cuja frequência difere ligeiramente da frequência base.

Tomemos com exemplo as frequências A e E definidas na Figura 2.37 para a medição da dupla distância d , tais que a distância de 200m corresponde a 5 comprimentos de onda da primeira frequência e a 4 comprimentos de onda da segunda frequência, isto é, $f_E = 4/5 f_A$. Através da diferença das frequências, $f_A - f_E = f_A/5$, obtém-se um sinal cujo comprimento de onda é igual a 5 comprimentos de onda de A e igual a 4 comprimentos de onda E, exactamente 200 m.

Neste exemplo, a menos da constante a , mostra-se que a distância d tem uma relação directa com cada uma das frequências. Tomando as frequências A, E e A-E o cálculo da distância corresponde, respectivamente, a

$$d_A = 3 \times 40 + 1.70\pi \times 40 / 2\pi = 120 + 34 = 154 \text{ m},$$

$$d_E = 3 \times 50 + 0.16\pi \times 50 / 2\pi = 150 + 4 = 154 \text{ m},$$

$$d_{A-E} = (3-3) \times 200 + (1.70-0.16)\pi \times 200 / 2\pi = 154 \text{ m}.$$

Daqui se tira que a fase da diferença de frequências é igual à diferença das fases ($\phi_{A-E} = \phi_A - \phi_E$), donde se conclui que a determinação da distância pela diferença das fases é equivalente e dispensa, para este exemplo, o conhecimento da incógnita n . No entanto, esta conclusão final é obviamente falsa para o caso geral, pois pela figura pode-se verificar que $n_A = n_E$ para $\phi_A > \phi_E$ e $n_A = n_E + 1$ para $\phi_A < \phi_E$. Daí que o valor inteiro de n_{A-E} ou é 0 ou 1.

Para distâncias superiores a 200 m, da diferença de frequências resulta um número n de comprimentos de onda de 200 m do mesmo modo indeterminável. Pelo que, a resolução do problema passa pela multiplicação das duas frequências fundamentais de forma a obter os correspondentes comprimentos de onda de 2 000 m, 20 000 m e 200 000 m e resolver o problema sem ambiguidades.

Os EDM em vez de utilizarem frequências na determinação das distâncias duplas, para no final as dividir por 2 de forma a obter a distância efectiva, acabam por utilizar uma frequência efectiva tal que, de acordo com o exemplo apresentado, $\lambda_A = 20$ m e $\lambda_E = 25$ m, resulte a distância de 77 m directamente através do processo.

2.2.4 Estações totais

Os instrumentos electrónicos actualmente mais utilizados em topografia são designados por *estações totais electrónicas*. São constituídos por um teodolito electrónico e um instrumento de medição electro-óptica (EDM). O EDM é colocado numa posição concêntrica em relação à luneta do teodolito e é, nos instrumentos mais recentes, incorporado na própria luneta, formando um único bloco. Até há bem pouco tempo, era frequente o EDM ser acoplado à luneta, o que permitia o seu uso quer nos teodolitos electrónicos quer nos teodolitos ópticos, formando assim, uma estação total semi-electrónica.

O conceito de estação total não apareceu, ao contrário do que se possa pensar, na era dos instrumentos electrónicos, pois ele se define como sendo um instrumento que permite medir, em simultâneo ou em tempo útil, os ângulos vertical e horizontal e as distâncias. Nos instrumentos ópticos as lunetas estavam dotadas de traços estadimétricos para possibilitar a medição de distâncias com o auxílio de estádias (barras de comprimento fixo colocadas no ponto visado) ou régua graduada. Existiam até, aparelhos que permitiam a redução automática das distâncias ao plano horizontal, eram os chamados teodolitos auto-redutores, de que o RDS da Wild é um exemplo.

As estações electrónicas estão munidas de um microprocessador, tal como nos teodolitos electrónicos, que gere o conjunto de operações possíveis numa estação total, permitindo a quase totalidade do cálculo topográfico em tempo real através de programas computacionais inseridos na sua memória, bem como, o armazenamento de grandes quantidades de dados.



Figura. 3.38 – Estação total electrónica (Sokkia SET500).

Antes de se poder incluir todas as componentes de cálculo e registo de dados, estas estações estavam munidas de um acessório externo que cumpria com essas funções, era a chamada *caderneta electrónica*, hoje em dia já em desuso.

Relativamente à unidade de armazenamento de dados, existem aparelhos que não tendo memória interna recorrem a disquetes ou cartões para esse efeito. Também, para o caso de se aumentar a capacidade de memória, alguns instrumentos com memória interna recorrem a esse tipo de armazenamento. Actualmente, já aparecem aparelhos com mini-discos rígidos incorporados, tornando-se cada vez mais próximo de um computador pessoal.

O último grito de instrumentos deste género vem equipado com servo motores que permitem uma automatização das observações. Foram concebidos essencialmente para trabalhos de controlo de obras de engenharia e para outro tipo de trabalhos cuja função de instrumentos motorizados poderá otimizar o trabalho. Nestes aparelhos é também possível introduzir um sistema de comunicação rádio, ou GSM, e convertê-la numa estação remota, comandada à distância por computador.

2.2.5 Níveis

O princípio do nivelamento geométrico baseia-se na diferença de alturas de dois pontos próximos observadas através de uma visada perfeitamente horizontal e definida por um nível situado entre os pontos. A Figura 3.38 mostra esse princípio.

O desnível resulta pela diferença da leitura atrás com a leitura à frente ($\Delta h = L_A - L_F$), inserido num encadeamento de lanços como é mostrado na Figura 2.11.

Um nível consiste numa luneta, cujo suporte permite a rotação em torno do seu eixo principal (coincidente com a vertical) e está munido de três parafusos calantes; paralelamente ao eixo de colimação (definido pela linha que une o centro óptico com o cruzamento dos fios do rectículo) está acoplada uma nivela tórica ou um sistema de calagem cuja linha de apoio deve estar paralela com o eixo de colimação. Sempre que o sistema está nivelado, a linha de colimação ou de visada está horizontal, permitindo nessa condição proceder à leitura correcta.

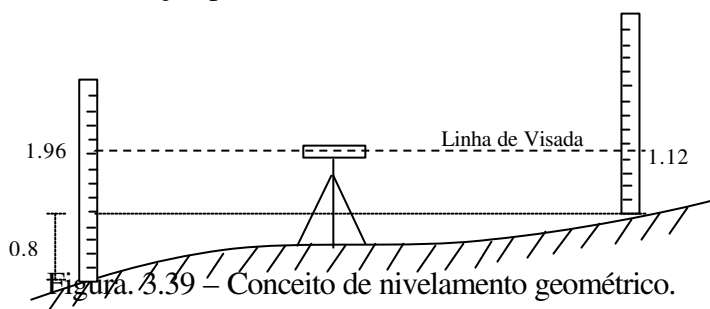


Figura 3.39 – Conceito de nivelamento geométrico.

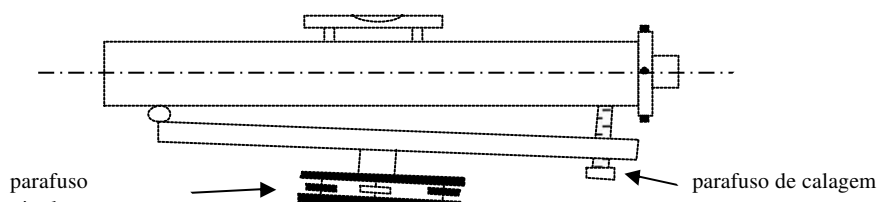


Figura 2.40 – Esquema de nível com parafusos nivelantes e parafuso de calagem horizontal da visada.

Actualmente, face à gama de níveis disponíveis, podemos distingui-los, desde os mais antigos até aos mais modernos, em dois grandes tipos: *níveis ópticos* e *níveis electro-ópticos*. Relativamente aos primeiros, podem-se dividir, quanto ao sistema de calagem, em: níveis ópticos de nivela e níveis ópticos com compensadores automáticos; e quanto ao sistema de leitura, em: níveis de leitura simples e de leitura refinada, os chamados níveis de lâminas de face paralela.

Os *níveis ópticos de nivela* têm todos uma luneta com lentes de focagem interna e um conjunto de prismas e reflectores que permitam ao observador a visualização do campo de visão e da posição da bolha da nivela sem necessitar de se mover. A diferença entre este tipo de instrumentos reside substancialmente nos suportes da luneta e da nivela, na estrutura do eixo de rotação, e na qualidade óptica da luneta.

Nos *níveis ópticos com compensador automático* as nivelas foram substituídas por compensadores. Estes baseiam-se quer no princípio (mecânico) do pendulo gravítico (Figura 2.41), quer no princípio hidrostático de líquidos voláteis, para obter a horizontalidade da linha de visada. Existem ainda outros princípios utilizados nos compensadores, mas devido à sua complexidade não interessa serem aqui abordados.

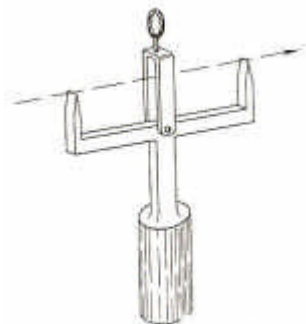


Figura 2.41 – Princípio pendulo gravítico.

Os *níveis electro-ópticos*, os mais avançados em termos de tecnologia, possuem também sistemas de calagem com compensadores automáticos, mas o que os torna inovadores e revolucionários é o seu sistema de leitura que tal como nos teodolitos electrónico, dispensa o observador desta tarefa. Utilizando o princípio de scanner por laser e com miras graduadas com código de barras, procede à leitura automática do valor de nível e da distância à mira. São instrumentos electrónicos munidos de micro-processadores e de unidades de memória para o armazenamento de dados, libertando também o observador da tarefa de registo das leituras e cálculo de nivelamento.

O posicionamento das miras graduadas é feito sobre as marcas de nivelamento em pontos de referências ou de cota, ou sobre sapatas em pontos de passagem. As sapatas são bases, normalmente metálicas, que servem de suporte da régua e permite uma justaposição estável para as duas visadas, frente e retaguarda.

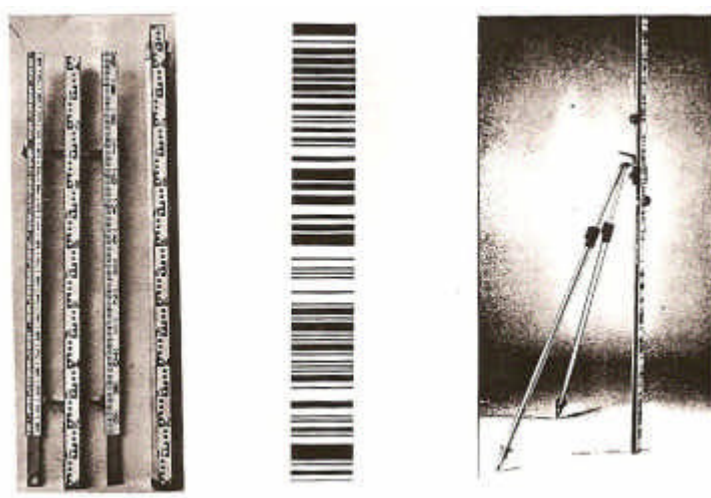


Figura 2.42 – Réguas graduadas de traço analógico e traço de código.

2.2.6 Sistema de Posicionamento Global (GPS)

O GPS (*Global Positioning System*) é um sistema de posicionamento de cobertura global, isto é, possível de ser utilizado em qualquer ponto à superfície da Terra ou nas suas imediações atmosféricas, e que se baseia na medição de distâncias através de tempos de percurso e diferença de fase de sinais electromagnéticos emitidos por uma constelação de satélites artificiais.

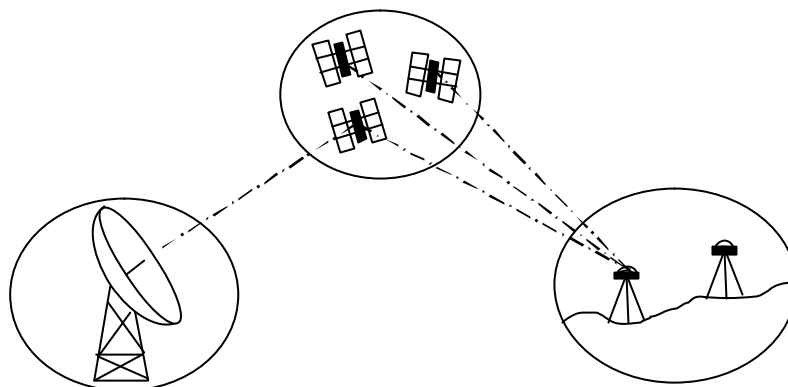


Figura 2.43 - Componentes do sistema GPS.

Este sistema desenvolvido pelos Estados Unidos da América, teve origem num sistema análogo, iniciado em 1960 pela Força Aérea dos E.U.A. e pela NASA, o sistema TRANSIT. Ele foi concebido, para além dos interesses de navegação e de estratégia militar, com o objectivo de estabelecer um *datum* geodésico global e sua ligação aos *data* locais. Esta primeira aplicação no campo da geodesia iniciou-se em 1967. Posteriormente, em 1974, e com o objectivo de melhorar o sistema, a Secretaria de Estado da Defesa Norte Americana avança com a ideia do actual sistema GPS, designado por NAVSTAR GPS (Navegation Satellite Timing and Ranging), mais aperfeiçoado e mais preciso do que o sistema anterior.

O sistema é constituído por três componentes principais, a ***componente espacial***, a ***componente de controlo*** e a ***componente utilitária***.

A ***componente espacial*** é composta por uma constelação de 24 satélites, 21 em utilização permanente e 3 de reserva. Estes satélites são emissores de sinais electromagnéticos portadores de informação e com características mensuráveis. Estão munidos de relógios atómicos bastante estáveis, os quais são responsáveis pela estabilidade e qualidade dos sinais emitidos.

A ***componente de controlo*** é constituída por um conjunto de várias estações de rastreio dos satélites, espalhadas ao longo do equador e por uma estação de controlo, situada nos Estados Unidos, junto a Colorado Springs.

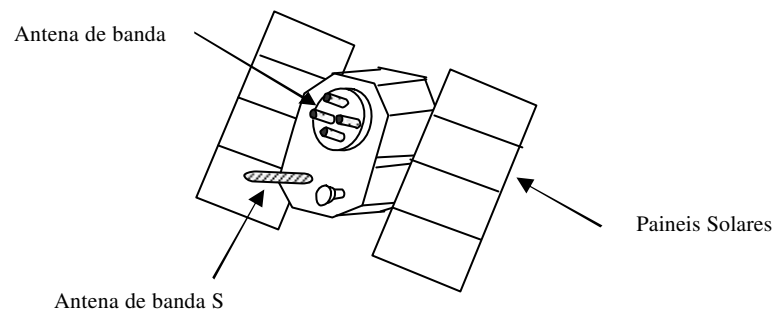


Figura 2.44 - Satélite GPS

A componente de controlo tem a função de :

- verificar o funcionamento dos satélites;
- enviar os dados necessários para os satélites;
- determinar e enviar as efemérides dos satélites (parâmetros orbitais para uma dada época);
- determinar as correcções dos relógios dos satélites;
- determinar as correcções aproximadas devido ao atraso atmosférico sofrido pelo sinal;
- controlar as manobras de substituição dos satélites;
- actualizar a mensagem de navegação.

A **componente utilitária** é formada pelo conjunto de todos receptores usados pelos variadíssimos utilizadores do sistema a nível global. Os receptores são compostos por um **processador**, uma unidade de registo de dados e uma **antena receptora do sinal**. Os receptores recebem e descodificam o sinal, ao qual aplicando certos algoritmos de cálculo obtêm-se a posição e velocidade do receptor (centro de fase da antena), e o tempo exacto com a precisão superior a 1µseg. O sinal pode também ser processado à posteriori, a fim de serem obtidos melhores resultados de posicionamento.

Os satélites que formam a constelação estão distribuídos por 6 planos orbitais, com inclinação de 55° e com 3 a 4 satélites por cada plano orbital. A órbita é quase circular ($e=0,02$) e o semi-eixo maior (raio da órbita) é de 26000Km, com um período de revolução de 12 horas siderais, ou seja, duas revoluções em cada rotação de 360° da Terra (um dia sideral); esta é a razão pela qual, os satélites nascem 3^m 56^s mais cedo em cada dia que passa de tempo universal.

O sinal dos satélites é emitido em duas frequências da banda L, L1 e L2 (ondas portadoras). Os valores destas frequências são múltiplos inteiros da frequência de base do oscilador do relógio, $f_0 = 10.528$ Mhz, respectivamente:

$$f_{L1} = 150 f_0 = 1575.42 \text{ Mhz}$$

$$f_{L2} = 120 f_0 = 1227.60 \text{ Mhz}$$

sendo os respectivos comprimentos de onda, de $\lambda_{L1} = 19\text{cm}$ e $\lambda_{L2} = 24\text{cm}$.

Estas ondas portadoras são modeladas de forma a transportarem os códigos de tempo e de mensagem de navegação. São modelados com dois códigos binários do tipo PRN (Pseudo-Random Noise - ruído pseudo aleatório), o P (precise) de frequência f_0 e o CA (coarse acquisition) de frequência $f_0/10$.

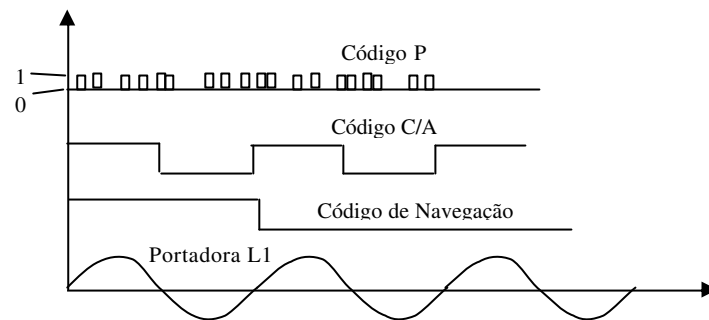


Figura 2.45 - Onda portadora e códigos

Ambos os códigos estão presentes na portadora L1, e em L2 apenas se encontra o código P. Existe ainda um terceiro código, modelado em L1 e L2, o D, designado por mensagem de navegação. O código P é o principal código usado na navegação e o mais preciso, como a sua denominação o indica; o código CA, menos preciso, é utilizado para uma rápida aquisição do código P, permite ainda, uma boa sincronização do tempo, entre os relógios do receptor e do satélite, e a leitura da mensagem de navegação. O código D contém a informação das efemérides dos satélites, do tempo GPS, do comportamento dos relógios dos satélites e outras informações adicionais.

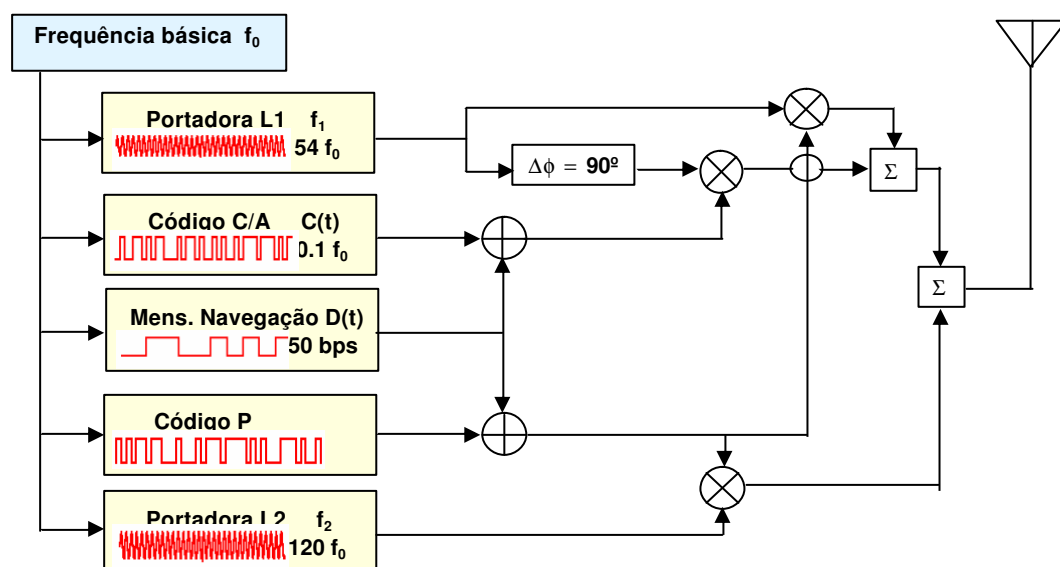


Figura 2.46 – Formação do sinal GPS no satélite.

O sistema de referência utilizado no GPS é o sistema de eixos triortogonais, associado ao Datum Global - WGS 84 (World Geodetic System de 1984). O estabelecimento deste datum global iniciou-se com o sistema TRANSIT nos anos 70, com a designação de WGS72; aperfeiçoado nos anos 80 com a introdução do actual sistema GPS e com outros sistemas de posicionamento, dando origem ao actual sistema WGS84. Num sistema de referência geodésico global definem-se duas componentes, a componente geométrica e modelo físico. Relativamente à componente geométrica, aquela que mais interessa para o sistema de posicionamento, ela é no WGS84 definida pelo *datum* a ele associado, cujos parâmetros são:

- elipsóide : $e^2 = 0.00669437999013$

$a = 6378137 (\pm 2\text{m})$;

- centro geométrico $\equiv$ centro de massa da Terra ($\Delta X=0, \Delta Y=0, \Delta Z=0$)

- orientação dos eixos : $\Delta W_1=0$; $\Delta W_2=0$; $\Delta W_3=0$

onde $W_1 \equiv Z$, eixo de revolução do elipsóide coincidente com o eixo de rotação da terra;

$W_2 \equiv X$, plano secundário (XOZ) coincidente com o meridiano médio internacional de referência, origem de contagem das longitudes;

$W_3 \equiv Y$, eixo perpendicular a OZ e OX de forma que o sistema resulte directo.

É sobre este sistema de eixos que são referidas as posições dos satélites e consequentemente, as posições dos pontos terrestres determinados através do sistema, por intermédio dos receptores. Essas posições espaciais definidas pelo terno de coordenadas (X,Y,Z), podem também ser representadas pelo conjunto de coordenadas geodésicas (φ, λ, h), relacionadas entre si através das seguintes expressões :

$$X = (N+h) \cos\varphi \cos\lambda$$

$$Y = (N+h) \cos\varphi \sin\lambda$$

$$Z = (N(1-e^2)+h) \sin\varphi$$

A determinação de posições por via do GPS necessita do conhecimento das coordenadas dos satélites em cada instante. Essas coordenadas cartesianas tridimensionais, definidas no sistema WGS84, são determinadas a partir de um conjunto de parâmetros das órbitas de cada satélite, cujo algoritmo pode ser encontrado em *Leick (1989)*, denominados por efemérides das órbitas dos satélites e podem ser difundidas no sinal através do chamado código de navegação (código D) – *efemérides rádio-difundidas*, ou disponibilizadas em formato diferente na Internet (site do IGS – *International Geodetic Service*) – *efemérides de precisão*.

As efemérides rádio-difundidas são definidas pelos elementos keplerianos (Fig.2.47): ascensão recta do nodo ascendente - Ω ; argumento do perigeu - ω ; inclinação - i ; semi-eixo maior - a ; excentricidade - e ; anomalia verdadeira - f .

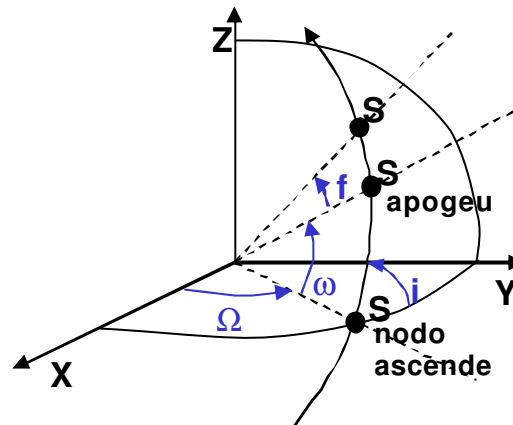


Figura 2.47 – Elementos keplerianos de uma órbita de satélite.

Os receptores são o elemento fundamental para o utilizador, pois são eles que permitem a navegação e a coordenação de pontos, quer através do posicionamento absoluto, quer através do posicionamento relativo.

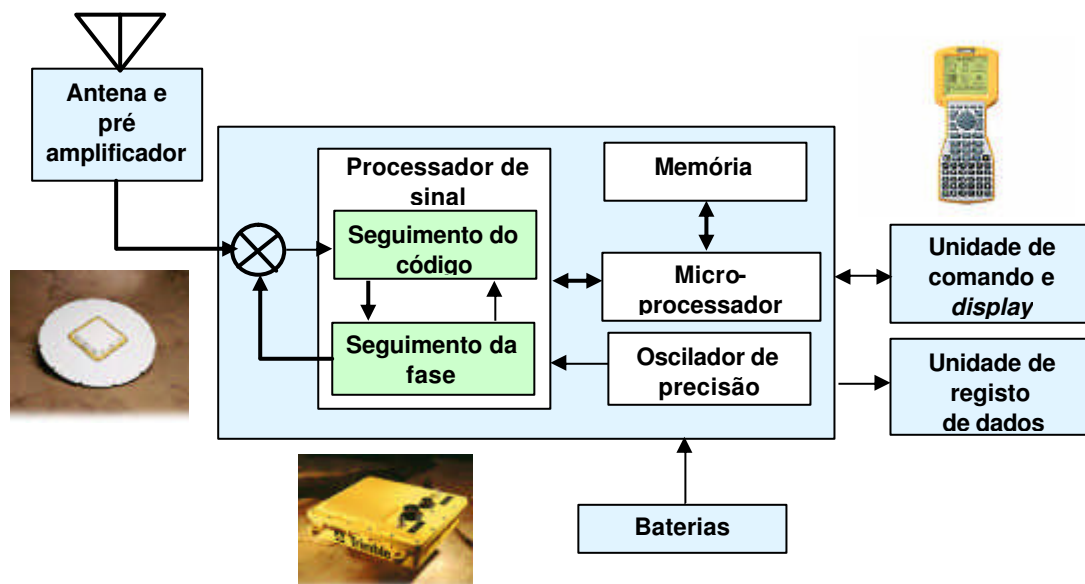


Figura 2.48 – Principais componentes do receptor.

O sinal recebido pela antena do receptor é decodificado e interpretado pelo processador. Para isso, eles estão munidos de relógios de quartzo com um oscilador de frequência f_0 , o que permite criar uma réplica dos códigos P e CA (se conhecidos), que depois de comparados com os sinais

recebidos, permitem determinar o seu desfasamento em termos de tempo. Esse desfasamento corresponde ao atraso do sinal, devido ao seu tempo de percurso, mais o estado dos relógios do satélite (p) e do receptor (k). O desfasamento (ΔT) multiplicado pela velocidade de propagação do sinal (velocidade da luz), resulta na chamada pseudo-distância do satélite ao receptor.

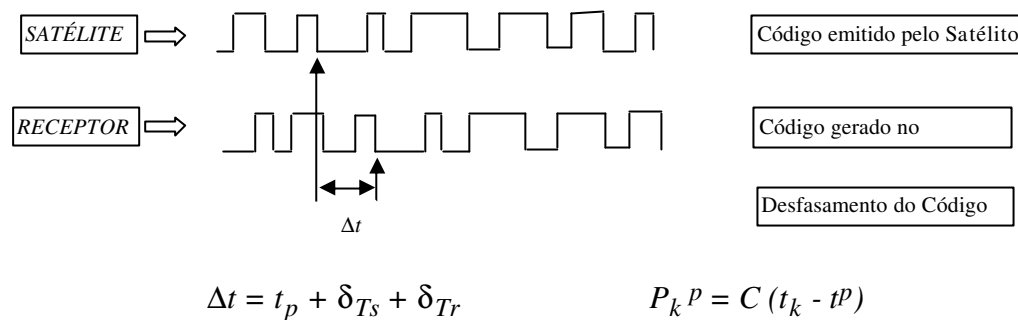


Figura 2.49 - Desfasamento dos sinais código.

A distância determinada desta forma (pelo código) é caracterizada de pseudo, pois está eivada dos erros dos relógios e dos atrasos do sinal devido a efeitos atmosféricos (ionosféricos e troposféricos).

Os receptores podem ainda, caso possam produzir sinais do tipo L1 e L2, fazer outro tipo de observação muito mais precisa, a diferença de fase entre a onda L emitida pelo satélite e a onda L gerada pelo receptor. É esta segunda observação que torna o GPS um dos sistemas mais precisos para trabalhos rigorosos de coordenação e posicionamento.

No mercado podem-se encontrar uma vasta gama de receptores, no entanto podemos subdividi-los da seguinte forma:

- a) os que registam apenas o código,
- b) os que registam o código e a diferença de fase,
- c) sem acesso ao código, medindo apenas a diferença de fase.

Os receptores do primeiro tipo são normalmente designados por receptores de navegação (*pathfinders*), são os menos precisos, pelo que só poderão ser utilizados para coordenação de pequena escala (por exemplo, nas aplicações de SIG's - Sistemas de Informação Geográfica) ou posicionamento pouco preciso (navegação). Os receptores do segundo e terceiro tipo oferecem resultados de posicionamento mais precisos e por isso são os utilizados nas aplicações da topografia, hidrografia e geodesia, ou em qualquer outra aplicação de posicionamento que requeira maior rigor. Os receptores que medem apenas diferenças de fase têm a desvantagem, pelo facto de não ter acesso ao código, de não obter directamente as efemérides dos satélites; obrigando que,

por outra via, se tenha de obter à posteriori tais dados. Entre nós desconhecem-se quaisquer receptores deste tipo a operar no nosso país.

Relativamente às antenas, também se pode fazer uma classificação:

- a) de código
- b) simples ou de monofrequência (L1)
- b) de dupla frequência (L1,L2) ou geodésicas (c/ prato ou *shock-ring*)

As antenas podem ser internas (incorporados no receptor) ou externas. Particularmente, em relação às antenas utilizadas na geodesia, a inclusão de um prato ou do sistema *shock-ring* surge para eliminar os sinais reflectidos (multitrajecto ou sinais indirectos), que inferem na medição verdadeira da diferença de fase.

Uma outra característica dos receptores é o número de canais (de grosso modo, as vias de ligação individual entre a antena e o processador), cada um deles responsável pela recepção e condução do sinal de um só satélite. O número de canais que um receptor possui poderá limitar o número de satélites observados em cada instante; e no caso dos receptores de dupla frequência, deverá existir o dobro do número habitual de canais, pois por cada satélite observado são captados dois sinais, L1 e L2.

Relativamente ao registo de dados, salienta-se aqui, apenas como exemplo, o caso dos receptores do segundo tipo. Neles são criados, essencialmente, dois ficheiros de dados, um com as observações de código e de fase (L1,CA,L2,P, para o caso dos de dupla frequência) e outro com as efemérides. O ficheiro de observações, contém as medições de código e fase relativas às épocas de observação e aos satélites observados. O ficheiro de efemérides contém as efemérides difundidas através dos sinais relativas aos satélites observados, não sendo de precisão pelo facto de terem sido calculadas à priori, eles são meras previsões. No entanto, para trabalhos comuns de topografia e geodesia é mais que suficiente. Existe outro tipo de efemérides, as efemérides de precisão, que são calculadas à posteriori, pois resultam das observações de rastreio dos satélites; são normalmente difundidas através da Internet. Outros ficheiros que poderão ser criados pelos receptores trazem informações adicionais, não necessárias ao processamento de dados propriamente dito.

Os tipos de posicionamento usando o sistema GPS, podem-se definir por: posicionamento absoluto (com apenas um receptor), determinação da posição no sistema WGS84 relativamente à sua origem (centro de massa da terra); e posicionamento relativo (com dois receptores), também designado por GPS diferencial, que consiste na determinação da posição de um ponto (livre) em relação a um outro ponto (base) fixo, isto é, com coordenadas conhecidas.

O posicionamento absoluto utiliza o código e são necessários 4 satélites no mínimo para determinar os parâmetros de posição $(X, Y, Z, \Delta T) \Leftrightarrow (\varphi, \lambda, h, \Delta T)$ em cada instante de observação, sendo ΔT o estado do relógio do receptor.

No posicionamento relativo, como as coordenadas da estação base são conhecidas, os parâmetros a determinar são apenas as coordenadas da estação livre (X_2, Y_2, Z_2) , mais os estados dos dois relógios $(\Delta T_1, \Delta T_2)$. Para este tipo de posicionamento tanto pode ser utilizado o código como a diferença de fase.

No posicionamento absoluto, a precisão é actualmente de 5 a 10m e no posicionamento relativo, é de 0,5 a 2m utilizando o código e na ordem de $1\text{mm} \pm 1\text{ppm}$, utilizando a diferença de fase. Enquanto no posicionamento absoluto, as posições podem ser determinadas à custa de um único instante (época) de observação, no posicionamento relativo é necessário fazer várias observações consecutivas, de cerca 1 minuto para o código e de 10 minutos a 1 hora para a diferença de fase. O tempo de observação depende essencialmente da distância entre os receptores; depende também do número de satélites em observação, do intervalo entre épocas de registo de observações e dos modelos matemáticos de cálculo utilizado no pós-processamento. Os receptores estão capacitados para registar observações com intervalo mínimo de 0,5 ou de 1seg.

O posicionamento relativo divide-se também em modo estático e modo cinemático; no estático determina-se a posição de um único ponto e o receptor da estação livre está fixo; no cinemático determina-se as posições de pontos que definem um trajecto, sendo o segundo receptor designado por estação móvel.

Vantagens do sistema GPS :

- pode ser operado sob quaisquer condições atmosféricas, sem afectar a sua precisão;
- não necessita de intervisibilidade entre os pontos no posicionamento relativo;
- alcances quase ilimitados no posicionamento relativo, é condicionado apenas pelo número mínimo de satélites intervisíveis pelas duas estações;
- pode-se operar com o sistema em qualquer hora do dia, desde que haja o número mínimo de satélites disponíveis;

Desvantagens :

- necessita de intervisibilidade com os satélites, i. é., o sinal dos satélites, de propagação rectilínea, não pode ser obstruído por qualquer objecto;
- interferências sobre o sinal, provocadas por outros sinais ou campos electromagnéticos; condições que podem prejudicar o acesso e a boa recepção do sinal.

A característica de intervisibilidade com os satélites dificulta a operacionalidade e a eficácia do sistema em zonas urbanas e de vegetação alta. É de facto um dos inconvenientes importantes no sistema GPS, que torna a instrumentação e as técnicas clássicas imprescindíveis e complementares ao GPS nos trabalhos de topografia.

Nos trabalhos de ligação de levantamentos topográficos à rede, bem como, no apoio topográfico ao método fotogramétrico, o GPS é actualmente o sistema mais adequado, proporcionando operações de campo a baixo custo.

Efeitos atmosféricos na propagação do sinal

Os dois efeitos atmosféricos sobre a propagação do sinal são os efeitos troposférico e ionosférico, provocados pela passagem respectiva nas camadas da troposféra e ionosféra. O resultado destes efeitos é o atraso na fase do sinal.

A **Troposféra** é a camada atmosférica que vai desde a superfície terrestre até aos 50Km de altitude. É um meio não dispersivo, o efeito de atraso provocado no sinal é função da temperatura, da humidade relativa do ar e da pressão atmosférica. O problema na modelação deste efeito é o facto de não ser possível conhecer os valores de temperatura, humidade e pressão em todas as subcamadas e ao longo da trajectória de propagação do sinal; esses valores são conhecidos, normalmente, apenas à superfície.

Dentro da precisão de 1 a 2ppm e para bases pequenas (até 20Km), este efeito pode ser desprezado, a partir daí já será necessário entrar com modelos de correcção apropriados.

A **Ionosféra** é a camada atmosférica que vai dos 100 aos 1000Km de altitude, é composta por partículas ionizadas (electrões livres), é um meio dispersivo e tem um efeito semelhante de atraso no sinal. Este efeito é proporcional à quantidade total de electrões e pode ser quantificado pela seguinte expressão, dada por Klobuchar em 1983

$$\nu = \frac{40.3}{Cf^2} \text{TEC} \quad (4.5.17)$$

onde o TEC é o número de electrões por metro cúbico, com valores que andam entre os 10^{16} e 10^{19} .

3. ERROS DE OBSERVAÇÃO

Porque os instrumentos e métodos de medição não são perfeitos e ideais, existem sempre erros e imperfeições que se cometem na medição de qualquer grandeza, ou seja, existe uma natureza estatística das observações. Numa dada grandeza sujeita a um processo de medição, quando repetida várias vezes, nunca resulta num igual valor numérico, mas sim em diferentes valores que giram em torno de um valor médio, mais ou menos representativo da grandeza a ser medida.

Vamos assumir que se pretende medir uma distância de 100 metros com uma fita métrica de 10 metros e com divisão centimétrica. Se o fizermos repetidamente iremos obter uma amostra de valores para aquela distância do tipo: 99.99m, 100.01m, 100.03m, 99.96m, etc. Devido à subdivisão centimétrica os valores resultam com duas casas decimais, ou três quando se estima o milímetro, facto que podia levar à conclusão errada de se tratar de uma estatística discreta com 2 ou 3 casas decimais, mas isto resulta apenas devido à precisão da leitura. O problema deve ser tratado no domínio da estatística contínua, pois a distância entre quaisquer dois pontos dum espaço real é definida por uma norma, que é um valor real.

Para aquela medição, poder-se-á obter qualquer valor, embora seja de esperar, pela experiência, que os valores próximos de 100.00m sejam os mais prováveis; 100.25m e 99.90m serão, por exemplo, pouco prováveis, daí se designarem por valores grosseiros.

Fazendo n medições, agrupando-as em intervalos Δx e utilizando um gráfico de barras (histograma) para representar a sua frequência relativa n_i/n , obtemos uma representação gráfica da distribuição da amostra:

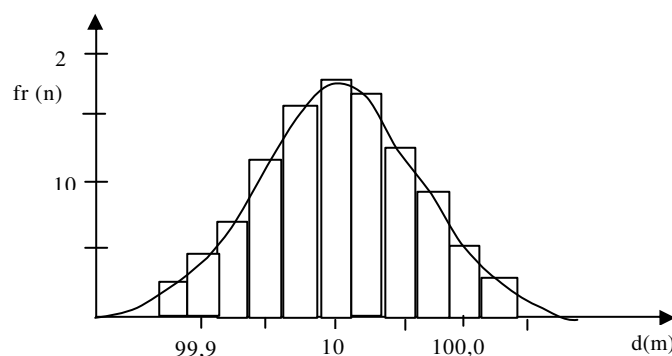


Fig.3.1 - Histograma de frequências relativas.

onde a linha contínua de ajustamento das barras tem a forma de um sino, mais ou menos aberto, na qual o seu máximo ocorre em torno da média da amostra. Quanto maior for o afastamento (desvio) de um dado valor em relação à média, menor será a frequência relativa, ou seja, menor será a probabilidade de ocorrência do valor da medição respectiva.

Fazendo um teste de hipótese, confirma-se a hipótese H1 de ser uma **distribuição Normal**. Daí que os processos típicos de medição (observação) de grandezas de posicionamento (Geodesia, Astronomia Geodésica, Topografia, Fotogrametria, Hidrografia, etc...) seguem, ou respeitem, a lei estatística de uma distribuição Normal.

Recorde-se algumas características e parâmetros de uma distribuição Normal. A sua média ($\bar{X}$) é uma estimativa do valor médio (μ) ou esperança matemática, uma medida de localização da amostra; o erro médio quadrático (S_X) é uma estimativa do desvio padrão (σ), a raiz quadrada da variância (momento centrado de 2ª ordem ou o momento de inércia da função densidade), que é uma medida de dispersão da amostra. Quando o valor de σ^2 aumenta, a área da função densidade fica menos concentrada em torno da média, e vice-versa.

Recorde-se o formulário de alguns parâmetros:

$$\sigma = \sqrt{\sum_i \frac{(\mu - x_i)^2}{n}} \quad s_X = \sqrt{\sum_i \frac{(\bar{X} - X_i)^2}{n-1}}$$

onde n e (n-1) são os respectivos graus de liberdade.

A observação, o registo, o manuseamento das observações e a imperfeição dos métodos levam-nos a valores eivados de erros, isto é, o processo de observação está sempre sujeito à influência de variadíssimas fontes de erro.

3.1 Tipo de erros

Podem-se dividir os erros de observação em: **aleatórios**, **sistemáticos**, **periódicos** e **grosseiros** ou **enganos**. Os erros periódicos podem, no entanto, ser enquadrados nos aleatórios ou nos sistemáticos, devido ao seu carácter e às circunstâncias.

Erros aleatórios: são erros de pequena magnitude, e são a razão pela qual as medições repetidas não apresentam o mesmo valor, ou seja, são parte da natureza da medição. Os erros de igual magnitude e de sinais contrários têm igual probabilidade de ocorrência ($P(x_j = a) = P(x_i = -a)$).

Se representarmos estes erros ($e_i = \mu - x_i$) num histograma obtemos um gráfico idêntico ao de x_i , quer isto dizer que, este tipo de erros também têm uma distribuição Normal $N(0, \sigma^2)$, pois se $x \in N(\mu, \sigma^2)$ então $x+a \in N(\mu+a, \sigma^2)$.

Estes erros não podem nunca ser determinados nem completamente controlados. Eles são o que resta, depois de se terem removido todos os restantes erros, ou seja, são aqueles que não assumem um carácter determinístico conhecido.

As observações são, normalmente, sujeitas à aplicação de técnicas de estimação (ajustamento) de modo a minimizar a influência dos erros aleatórios.

Erros sistemáticos: são erros que alteram a observação sistematicamente, em sinal e/ou magnitude, podendo variar em magnitude ao fim de longos períodos de tempo. São muito perigosos porque tendem a acumular-se. Estes erros ocorrem de uma forma determinística, eles dependem não só do observador, bem como do instrumento utilizado e das condições ambientais de trabalho. Como exemplo, ao utilizarmos uma fita de 1m, que seja mais curta 5cm que o seu padrão, ir-se-á cometer sistematicamente, um erro de 5% nas distâncias medidas. A refração, quer lateral quer vertical, é outro fenómeno que age como fonte de erros sistemáticos.

Para combater este tipo de erros deve-se calibrar (aferir e rectificar) os instrumentos, devem-se utilizar técnicas de controlo de observação de má qualidade, bem como usar técnicas operatórias apropriadas. Se a grandeza destes erros for determinada, devem-se corrigir as observações desses mesmos erros antes de as tratar matematicamente; caso contrário, devem modelar-se os erros de modo a serem incluídos como parâmetros (incógnitas) no processo de observação e estimação. Descobrir e controlar este tipo de erros durante a técnica de estimação requer uma grande experiência e um conhecimento avançado, não sendo à partida, garantido sucesso total.

Erros grosseiros ou enganos: são normalmente grandes e resultam de um menor cuidado por parte do observador, por exemplo, ler um 8 em vez de um 6, registar um 3 em vez de um 13. Evitam-se, fazendo observações bastante cuidadas e com grande concentração, embora nunca se fique com a certeza da sua ausência nas observações. Quando eles são de pequena magnitude, podemos considerá-los como aleatórios. Como norma, as contas, leituras e registos devem ser sempre verificados mais do que uma vez, e os originais dos registos devem manter-se sempre como fonte primordial das observações, não se devendo portanto, copiá-los (transcrevê-los) ou passa-los a limpo. Estes erros podem ser descobertos no processo de análise e ajustamento e depois serem corrigidos.

O avanço tecnológico ao nível do equipamento de medição permitiu retirar o manuseamento directo dos dados por parte do operador, remetendo esta tarefa para as componentes electrónicas dos instrumentos. Este facto veio trazer maior fiabilidade nos dados, desde a sua fonte até ao momento de seu processamento.

Erros periódicos: são também, de certo modo, erros determinísticos, em que a cada um corresponde um outro mais ou menos igual, mas de sinal oposto. A sua grandeza é variável, dependendo do tipo de observação. Nas observações angulares, os erros da má graduação são deste tipo, combatem-se medindo várias vezes o mesmo ângulo em várias zonas do limbo, onde

em princípio a fase do erro é diferente; este processo é designado como *reiteração* ou *repetição* (ver erros instrumentais e seu tratamento).

Os conceitos de precisão e exactidão (designada também por precisão absoluta) estão directamente relacionados com dois tipos de erros atrás mencionados, respectivamente aleatórios e sistemáticos, e dizem respeito às medidas efectuadas.

A *precisão* traduz o grau de conformidade das medidas de uma mesma quantidade, ou seja, refere a proximidade entre as medidas repetidas. Se a dispersão dos valores for pequena (σ pequeno), então as medidas dizem-se precisas.

A *exactidão* ou *precisão absoluta* ("accuracy" em inglês) refere a proximidade do conjunto das observações, ou da sua média, em relação ao valor médio verdadeiro (μ). Por outras palavras, traduz um enfiamento entre o valor observado e o valor verdadeiro, provocado por erros sistemáticos não tidos em conta, ou não corrigidos.

Enquanto que a precisão é um factor de comparação interna a exactidão é um factor de comparação externa da amostra.

A precisão está directamente relacionada com os erros aleatórios, que são combatidos através da repetitividade da medição, ou seja, aumento da dimensão da amostra. Mais observações implica que o desvio médio da observação aleatória seja menor, resultando numa estimativa do valor médio das observações mais precisa.

Esta repetitividade não diminui a diferença entre o valor observado e o valor verdadeiro, isto é, não contribui para uma maior exactidão. A exactidão é obtida através de um controlo e combate dos erros sistemáticos, os quais causam o enfiamento da amostra.

3.2 Erros instrumentais e seu tratamento

Na medição de ângulos verifica-se um maior número de condicionantes impostas aos instrumentos de medida do que na medição de distâncias ou desníveis, por isso, iremos encontrar um maior número de erros instrumentais nos teodolitos, comparativamente aos restantes instrumentos. A importância destes erros estará de acordo com a precisão das observações que se pretende alcançar. Assim, há certos erros que devem ser considerados num tipo de observação mais precisa, do género das geodésicas e astronómicas, mas não será necessário considerá-los no tipo de observações menos precisas, do género das topográficas. A consideração de certos erros condicionará a metodologia operatória.

Erros axiais dos teodolitos

A condição da triortogonalidade de um sistema de eixos utilizado nos referenciais, aos quais a observação de ângulos está associada, impõe a perpendicularidade entre os eixos dos teodolitos e, a horizontalidade do plano primário ou fundamental impõe a verticalidade do eixo principal do teodolito. Estas condições originam, por defeitos de construção, os chamados erros axiais do teodolito.

1) O *erro da falta de verticalidade do eixo principal* é a influência do ângulo da falta de verticalidade desse eixo, sobre a leitura de uma direcção azimutal. É calculado pela expressão $\varepsilon_1 = i_1 \cdot \cotg(z)$, onde i_1 é o ângulo entre o eixo principal e a vertical do lugar segundo um plano perpendicular ao plano da visada, razão pela qual faz com que o erro varie com a direcção; e z a distância zenital da visada. Não existe qualquer processo de eliminar este erro, ele tem que ser calculado e depois corrigir a direcção do seu valor. Note-se que para distâncias zenitais próximas de 90° , ou seja visadas próximas do horizonte, $\varepsilon_1 \approx 0$, logo é um tipo de erro só considerado nas observações astro-geodésicas onde as pontarias para as estrelas têm uma altura considerável. Para a medição do i_1 os teodolitos (só os de grande precisão) devem de estar munidos de níveis graduados de modo a medir os deslocamentos da bolha, com os quais se calcula o i .

A falta de verticalidade existe essencialmente devido à má calagem da nivela, ou devido à sua desrectificação.

2) O *erro da falta de horizontalidade do eixo secundário*, também designado por falta de perpendicularidade do eixo secundário com o eixo principal é devido a duas causas. Por um lado é devido à falta da verticalidade do eixo principal, quando a nivela está mal calada ou desrectificada, por outro lado é devido à falta de perpendicularidade entre este eixo e o eixo principal, defeito esse de construção. A sua influência sobre uma direcção azimutal é dada por $\varepsilon_2 = i_2 \cdot \cotg(z)$, onde i_2 é o ângulo entre o eixo e o plano do horizonte, o qual toma sinais contrários e igual grandeza nas duas posições directa e inversa da luneta; pelo que será eliminado por observações conjugadas.

3) O *erro de colimação* (colimação horizontal), que afecta a leitura da direcção azimutal, é provocado pela falta de perpendicularidade do eixo de pontaria ou eixo óptico da luneta com o eixo secundário. Por outras palavras, é devido à existência de um ângulo entre o eixo de pontaria e o plano de colimação - plano que passa pelo cruzamento dos fios do retículo e é perpendicular ao eixo secundário.

Este ângulo anula-se ou minimiza-se deslocando os fios do retículo no sentido da colinearidade dos dois eixos, através de três parafusos de cabeça perfurada junto ao anel de focagem da ocular. É calculado pela semi-diferença das leituras nas posições directa e inversa da luneta, desfasadas de 200^grd através de: $i = [l_d - (l_i \pm 200)]/2$ com a luneta na horizontal.

O erro de colimação sobre a leitura azimutal é dado pela expressão $\varepsilon_3 = c \cdot \operatorname{cosec}(z)$, onde $\varepsilon_3 = c$ para $z \cong 100$ grados.

Outros erros instrumentais

4) *Erros da má graduação do limbo*, resultam da imperfeição no processo de cópia da graduação a partir do círculo original e da imperfeição da própria graduação desse disco. São erros do tipo periódico, e correspondem à diferença de espaçamento dos traços da graduação real do círculo com o espaçamento exacto de uma graduação ideal. Isto verifica-se quer nos limbos de leitura óptica quer nos de leitura electrónica. A influência destes erros revela-se mais significativa para medidas mais precisas, isto é, em trabalhos de geodesia e de 1ª ordem na topografia.

A única forma de eliminar a influência deste tipo de erros, é medir o mesmo ângulo repetidamente em diferentes partes do limbo, de modo a que estes erros periódicos passem a ter um carácter aleatório residual, e assim minimizar a sua influência. Há dois métodos de observação repetida, o *método de reiteração* e o *método de repetição*, hoje em dia a reiteração é a mais comum, estando também presente no processo de leitura electrónica dos teodolitos electro-ópticos.

5) *Excentricidade da luneta de pontaria*, ela pode existir por defeito de construção, sendo nesse caso de valor muito pequeno, ou pelo facto da luneta ser mesmo excêntrica. Tem a expressão : $e_{az} = \varepsilon/D$, onde D = distância e ε a excentricidade. É também eliminado na média das observações conjugadas.

6.a) *Excentricidade fixa do limbo*, ocorre por defeito de construção, embora seja mínimo, deve ser tido sempre em conta. O seu valor é dado por $e_{az} = \varepsilon/r$, r = raio da graduação e ε a excentricidade. É também cancelada na média das observações conjugadas.

6.b) *Excentricidade flutuante do limbo*, ocorre quando passa a existir folga na rotação do limbo ou na rotação da alidade. Não é eliminada pelas observações conjugadas, mas sim por leituras simultâneas e diametralmente opostas, caso que apenas se verifica nos teodolitos que têm esse dispositivo de leitura dupla.

7) *Falta de perpendicularidade do limbo horizontal em relação ao eixo principal*. É um erro de 2ª ordem.

Os erros até aqui mencionados afectam essencialmente a medição de ângulos horizontais. Os ângulos verticais são afectados, para além de alguns erros atrás mencionados, pelo erro de índice ou de colimação vertical.

8) *Erro de índice*, é devido à não verticalidade da linha formada pelo centro do limbo vertical e a referência de leitura. No caso dos limbos de calagem zenital existe uma nivela que deve ser calada antes de qualquer leitura por forma a verticalizar essa linha. Esta falta de verticalidade é provocada pela desrectificação da nivela ou por defeito de fabrico. No caso dos sistemas de auto-compensação ela é provocada pela desrectificação do sistema pendular. O erro é eliminável através das observações conjugadas da leitura vertical. Daí que se possa calcular o seu valor, para depois ser rectificada, através da fórmula seguinte:

$$e'_z = \frac{L_D - (400 - L_I)}{2}$$

Outros erros

Existem outro erros que, embora não sendo instrumentais, devem também ser abordados.

1) *Erro de centragem*, provocado pela falta de rigor do sistema de centragem utilizado e pela menor sensibilidade do operador para os casos de centragem não forçada e expedita. Para medições precisas utilizam-se sistemas de centragem forçada que funciona à base de peças de encaixe rigorosamente fabricadas; são utilizadas em certos casos de geodesia e topografia aplicada, por exemplo, em redes de geodinâmica e nas medições de controlo de obras de engenharia civil ou de estruturas de fabrico industrial. Este erro é semelhante ao erro de excentricidade da luneta.

2a) *Erro de refração vertical*, é o desvio ou deflexão do raio óptico para o zénite, devido ao comportamento refractivo dos raios luminosos na atmosfera terrestre, ao passarem de uma camada mais densa para uma menos densa. No caso de observações astronómicas o ângulo pode ser mesmo corrigido; no caso topográfico e geodésico, onde a visada não chega a sair da atmosfera terrestre, corrige-se directamente não o ângulo, mas o desnível entre o ponto estação e o ponto visado pela expressão: $\Delta h = [(1-K)/R] \cdot D^2$, onde $K \cong 0,2$ é um coeficiente de refração, R o raio da Terra e D a distância da visada. O efeito deste erro é atenuado, quando se fazem observações recíprocas de A para B e B para A, e anulado com recíprocas e simultâneas.

2b) *Erro de refração horizontal*, é o conjunto de desvios sucessivos do raio óptico em relação à direcção do eixo óptico, devido a atravessar várias camadas de ar com diferentes índices de refração, que resulta da existência de superfícies reflectoras de calor (paredes espelhadas, estradas alcatroadas, etc.) e superfícies libertadoras de vapor de água (rios, lagos, etc.) nas proximidades da visada. É um erro bastante perigoso nas medições mais precisas, pois não se consegue modular.

4. POSICIONAMENTO TOPOGRÁFICO

Nos vários métodos de posicionamento topográfico, operando de forma encadeada, isto é, coordenando pontos novos a partir de outros já coordenados nos sistemas de referência globais ou locais, o método de observação designa-se por irradiação e constitui parte do encadeamento topográfico. Estaciona-se num ponto, visa-se um ou mais pontos de forma radial, onde as direcções azimutais das visadas são referenciadas a uma origem, e medem-se os valores angulares e a distância das visadas.

Podemos definir dois tipos principais de irradiação: a *irradiação directa* e a *irradiação inversa*. Enquanto que, a irradiação directa verifica-se quando o ponto a coordenar é um ponto visado por um ou mais pontos estação, a irradiação inversa verifica-se quando o ponto estação é exactamente o ponto novo a coordenar, visadando a partir dele dois ou mais pontos.

Assim, apresentamos quatro métodos de irradiação clássica: a irradiada simples; a intersecção directa; a intersecção inversa; e a irradiada sucessiva. Adicionalmente, consideramos ainda o posicionamento por satélite, para a maior parte das aplicações topográficas, um método de irradiação, já que, o posicionamento é feito a partir de uma estação fixa para um ou vários pontos novos através da medição da respectiva *baseline* (componentes do vector que os une).

Os métodos de coordenação podem ser tridimensionais, obtendo-se directamente as três coordenadas do ponto (M, P, H), é o caso do posicionamento por satélite (GPS), ou bidimensionais - sobre o plano cartográfico, obtendo-se apenas as coordenadas planimétricas (M, P).

4.1 Irradiada simples

A *irradiada simples* é uma forma de coordenação directa de pontos novos, a partir de um ponto conhecido, onde são medidas a distância ao ponto a coordenar e o ângulo entre uma direcção de referência e a direcção desse ponto.

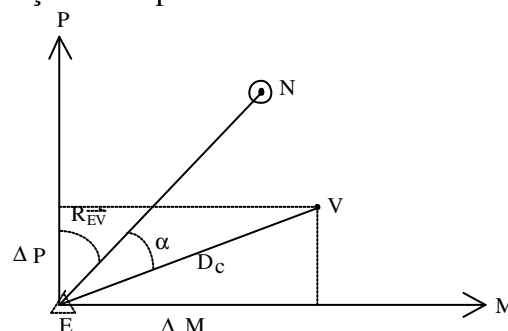


Figura 4.1 - Irradiada simples

Desse modo, as coordenadas do ponto a coordenar resultam de:

$$\begin{aligned}
 M_V &= M_E + \Delta M \\
 P_V &= P_E + \Delta P
 \end{aligned}
 \quad \text{com} \quad
 \begin{aligned}
 \Delta M &= D_C \sin R_{\vec{EV}} \\
 \Delta P &= D_C \cos R_{\vec{EV}}
 \end{aligned}
 \quad (4.1.1)$$

onde $R_{\vec{EV}} = R_{\vec{EN}} + \alpha$ e D_C é a distância reduzida ao plano cartográfico, reduzida a partir da distância verdadeira entre os pontos **E** e **V**. Na medição do ângulo α , se o teodolito for orientado usando a direcção $\vec{EN}$, ou seja, $Dir_{\vec{EN}} = R_{\vec{EN}}$, de modo que o rumo da origem do limbo seja $R_0 = 0^\circ$, então o valor directamente observado para a direcção $\vec{EV}$ será o próprio rumo $R_{\vec{EV}}$.

Este tipo de irradiada é usado essencialmente no levantamento de pormenor, ou simplesmente para estender a rede de apoio a pontos auxiliares. Habitualmente é acompanhada com a medição simultânea da distância zenital, por a forma a permitir também o transporte altimétrico (consultar nivelamento trigonométrico), constituindo assim, um método de posicionamento tridimensional.

4.2 Intersecção Directa

É o tipo de coordenação de um ponto não estacionável, em que se observam os ângulos a partir de outros pontos intervisíveis e com coordenadas conhecidas, medidos entre a direcção do ponto desconhecido e uma outra qualquer direcção de referência. São exemplos, os casos de coordenação de antenas, torres de igreja, e pontos de fachadas de edifícios para orientação dos modelos estereoscópicos na fotogrametria terrestre.

A intersecção directa mais comum é o caso onde existe intervisibilidade entre os pontos de apoio, onde são observados os ângulos entre as visadas dos pontos de apoio e direcção do ponto a determinar; sendo necessário observar o mínimo de dois ângulos com dois pontos conhecidos.

Existe um outro método, aplicado nos casos onde não existe intervisibilidade, e também conhecido por **método da intersecção de visadas**, em que são observados, não os ângulos directamente, mas os rumos das visadas do ponto a coordenar. É um método mais elaborado, do ponto de vista de observação, mas que resolve o problema da falta de intervisibilidade entre os pontos de apoio.

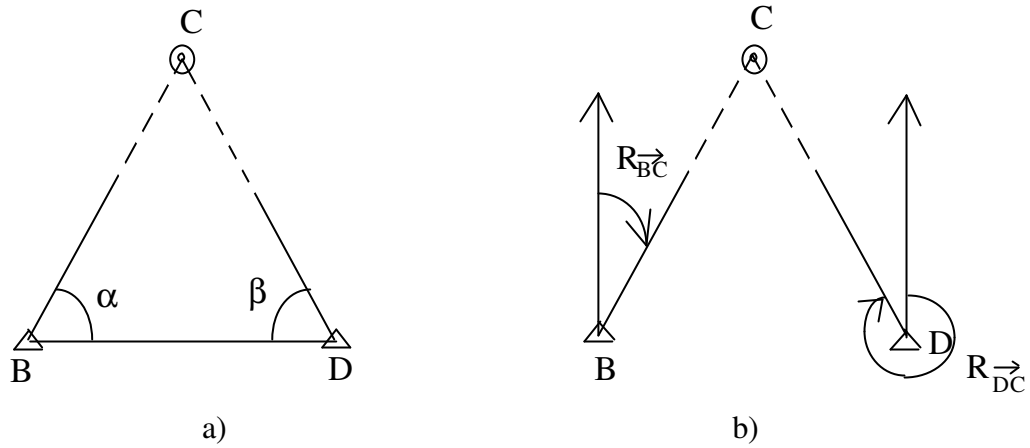


Figura 4.2 - Localização de um ponto por intersecção directa.

Analiticamente, as coordenadas do ponto C resultam das coordenadas de B e D, e dos respectivos ângulos α e β observados (Fig. 4.2-a), por:

$$M_C = \frac{(P_B - P_D) + M_D \cot g\alpha + M_B \cot g\beta}{\cot g\alpha + \cot g\beta} \quad (4.2.1a)$$

$$P_C = \frac{(M_D - M_B) + P_D \cot g\alpha + P_B \cot g\beta}{\cot g\alpha + \cot g\beta}$$

e, respectivamente para o caso da não intervisibilidade, das coordenadas de B e D, e dos respectivos rumos R_{BC} e R_{DC} observados a partir de outros vértices intervisíveis (Fig. 4.2-b), por:

$$M_C = \frac{(P_B - P_D) + M_D \cot gR_{DBC} - M_B \cot gR_{BC}}{\cot gR_{DC} - \cot gR_{BC}} \quad (4.2.1b)$$

$$P_C = P_D + (M_C - M_D) \cot gR_{DC}$$

Sempre que haja redundância de observações, o problema do cálculo deve ser resolvido pelo método de ajustamento dos mínimos quadrados, desenvolvido aqui para os casos da intersecção inversa e das poligonais amarradas.

É de salientar que os dois métodos, de ângulos e de azimutes, podem-se combinar num método misto, caso na prática se torne vantajoso, tendo em conta o aumento da redundância.

4.3 Intersecção Inversa

É um método de coordenação de um ponto novo a partir da medição, nesse ponto, dos ângulos formados pelas direcções de pontos com ele intervisíveis, já coordenados e radialmente bem distribuídos.

Facilmente se verifica que com a observação apenas de ângulos, são necessários, no mínimo, três pontos auxiliares ou de apoio, o que implica a medição de dois ângulos entre as respectivas visadas. Se considerarmos a observação adicional de uma distância, então, o número de ângulos a medir é apenas um, correspondendo a dois pontos visados. O problema pode ser analisado do seguinte modo, para um dado número de incógnitas (duas coordenadas) é necessário efectuar, no mínimo, o mesmo número de observações (dois ângulos ou um ângulo e uma distância), já que do ponto de vista algébrico, para um sistema com duas incógnitas são necessárias duas equações para que este seja possível e determinável.

Analise-se então, os lugares geométricos desses pontos, utilizando os seguintes símbolos: Δ ponto conhecido e coordenado, $\odot$ ponto novo a coordenar. Com dois pontos conhecidos A e B, e a medição de um ângulo α , a posição do ponto P fica indeterminada (Fig. 4.3), pois pode-se situar em qualquer ponto do arco dito capaz de $360^\circ - 2\alpha$.

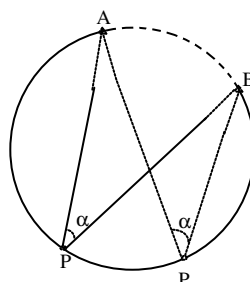


Figura 4.3 - Arco capaz de $360-2\alpha$ do ponto P.

A indeterminação é levantada à custa da medição de um segundo ângulo β com um terceiro ponto M, definindo um segundo arco capaz. Deste modo, a posição do ponto P resulta da intersecção dos dois arcos capazes de α e β .

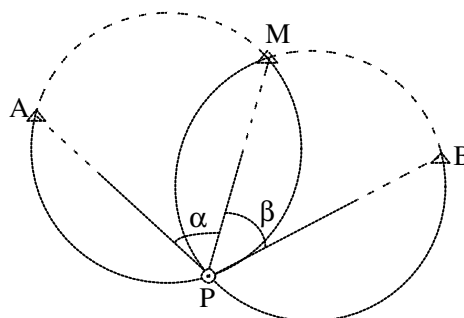


Figura 4.4 - Intersecção de dois arcos capazes.

4.3.1 - Fórmula de Délambre e resolução da intersecção

O problema da intersecção inversa, do ponto de vista analítico, consiste na determinação das coordenadas de P - (P_P, M_P) em função das coordenadas conhecidas de A, B e M, respectivamente, (P_A, M_A) , (P_B, M_B) e (P_M, M_M) e dos ângulos α e β medidos em P.

Designando por T_C a tangente do Rumo de P para um ponto C qualquer, dada por:

$$T_C = tgR_{PC} \frac{M_C - M_P}{P_C - P_P} \quad (4.3.1)$$

Então, P_P e M_P podem ser definidos pelas seguintes expressões, para M_P :

$$M_P = M_A - (P_A - P_P)T_A \quad (4.3.2a)$$

$$M_P = M_B - (P_B - P_P)T_B \quad (4.3.2b)$$

$$M_P = M_M - (P_M - P_P)T_M \quad (4.3.2c)$$

e para P_P :

$$P_P = \frac{M_M - M_A - P_M T_M + P_A T_A}{T_A - T_M} \quad (4.3.3a)$$

$$P_P = \frac{M_B - M_A - P_B T_B + P_A T_A}{T_A - T_B} \quad (4.3.3b)$$

$$P_P = \frac{M_B - M_M - P_B T_B + P_M T_M}{T_M - T_B} \quad (4.3.3c)$$

T_A e T_B são determinados por:

$$T_A = \frac{T_M - tg\alpha}{1 + T_M tg\alpha} \quad (4.3.4)$$

$$T_A = \frac{T_M + tg\beta}{1 - T_M tg\beta} \quad (4.3.5)$$

e T_M determinado pela **fórmula de Délambre**:

$$T_M = \frac{(P_B - P_A) + (M_M - M_A) \cot g\alpha + (M_M - M_B) \cot g\beta}{(M_A - M_B) + (P_M - P_A) \cot g\alpha + (P_M - P_B) \cot g\beta} \quad (4.3.6)$$

Para se obter o valor dos rumos R_{PA} , R_{PB} e R_{PM} nos quadrantes correctos a partir, respectivamente, das fórmulas (4.3.4), (4.3.5) e (4.3.6) é necessário multiplicar toda a expressão por (-1), correspondendo à troca de todos os sinais do segundo membro.

Existe, no entanto, um caso de impossibilidade de solução da intersecção inversa com três pontos. Dá-se quando estes três pontos definem juntamente com P uma circunferência perfeita, ou seja, quando há coincidência dos arcos capaz. Essa circunferência chama-se **círculo perigoso**. São situações que acontecem muito raramente, mas quando acontecem deve-se mover ligeiramente o ponto P, retirando-o do círculo perigoso, ou então, caso não seja possível, deve-se recorrer a um ponto excêntrico, a partir do qual se coordenará o ponto P desejado.

A medição de ângulos, para este caso, é a única observação que existe neste processo de coordenação, e que resulta eivada de erros. Medindo apenas dois ângulos o problema tem solução única, não se podendo, no entanto, estimar a imprecisão da solução encontrada. Torna-se então necessário, quer para confirmação da solução, quer para determinar e melhorar a sua própria precisão, efectuar a medição de mais ângulos, ou seja, recorrer a mais do que três pontos de coordenadas conhecidas. Assim, para cada ângulo acrescentado ao número de observações aumenta-se um grau de liberdade ao problema, o que se traduz na de **redundância de observações**, ou de **observações superabundantes**.

Com observações superabundantes a resolução do problema da intersecção inversa deve, de forma mais correcta, ser tratado pelo método de ajustamento dos Mínimos Quadrados, pois a sua solução, embora implique um cálculo mais elaborado, é a solução mais precisa.

4.3.2 - Método de observação

A medição de ângulos exige uma metodologia de operação elaborada, a qual deve ser adaptada às diversas circunstâncias que se podem apresentar, de modo a torná-la adequada e correcta. A completa elaboração desta metodologia deve-se essencialmente à existência dos erros instrumentais dos teodolitos. Portanto, todas as operações desta metodologia visam, essencialmente, a eliminação da influência desses erros sobre as observações.

Na medição de ângulos distinguem-se dois métodos que têm por finalidade atenuar os erros devido à má graduação dos limbos: **método de repetição** e **método de reiteração**, isto apenas para teodolitos ópticos. Ambos permitem medir o ângulo n vezes em n partes equidistantes do limbo. O método da repetição está já quase em desuso, pois a última geração de teodolitos ópticos estão todos equipados com mecanismos reiteradores. Este método consiste essencialmente no seguinte: inicia-se com o limbo fixo à base, visa-se a 1ª direcção do ângulo e faz-se a leitura, roda-se a alidade e aponta-se na 2ª direcção, faz-se a leitura, donde resulta um primeiro valor de α ; agora sem tocar na alidade solta-se o limbo da base e fixa-se à alidade, roda-se a alidade para a primeira direcção e faz-se a pontaria, solta-se o limbo da alidade e lê-se com ele fixo à base, vai-se à segunda direcção e lê-se para obter o segundo valor de α . O processo continua até varrer os 360° ou atingir o número de repetições desejadas.

No método da reiteração, é definido um dado número de origens (reiteraões) de medição dos ângulos, cujo intervalo é dado por $360^\circ/np$; onde p será o número de leituras multiplas diametralmente opostas, normalmente igual a 2 (número de microscópio ópticos), e n é o número de origens. Para os teodolitos com micrómetro, e nas medições de maior rigor, deve-se utilizar a expressão $(360/p+d)/n$ onde d é o valor da menor divisão do limbo que coincide com a amplitude do micrómetro (20' para o T2), permitindo também, uma reiteração do tambor do micrómetro. Com esse intervalo calculam-se as origens das n medições do ângulo ou ângulos, que deverá coincidir aproximadamente (a menos de erros de introdução do valor angular da origem) com a primeira leitura ou com a leitura da direcção de referência. Existe um botão na base do aparelho que permite a rotação do limbo de modo que a medição do ângulo seja iniciada num determinado valor de referência.

Devido aos erros axiais e aos erros de excentricidade, a observação de direcções, para a medição de ângulos, deve ser feita nas duas posições da luneta, directa e inversa; a este conjunto chama-se par de **observações conjugadas**. E para eliminar a influência de folgas e o efeito de torsão deve haver uma **rotação progressiva** e outra **regressiva** da alidade quando são observados ângulos. Conjugando estas duas operações obtemos o que se chama **observações encruzadas**.

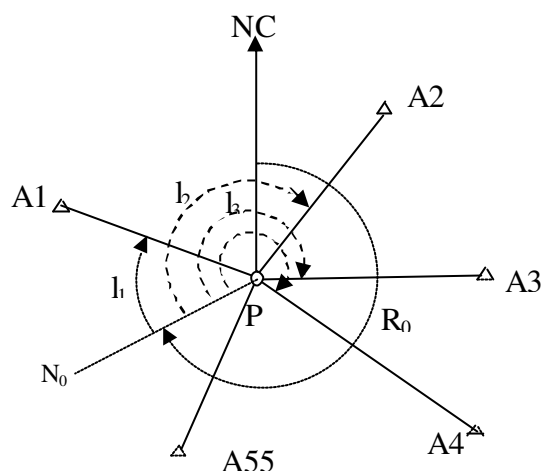
A observação de cada direcção, seguindo o método das observações encruzadas, deve de obedecer à seguinte sequência de pontarias:

- 1º) Directa Progressiva (DP)
- 2º) Inversa Regressiva (IR)
- 3º) Inversa Progressiva (IP)
- 4º) Directa Regressiva (DR)

Embora esta seja a sequência mais completa, normalmente usada em trabalhos de geodesia, ela deve no mínimo ser formada pela primeira (DP) e segunda pontaria (IR).

O problema da intersecção inversa apresenta-se-nos normalmente, não com a medição de apenas dois ângulos mas, com a medição de vários ângulos. Nessa situação, a observação dos ângulos pode ser feita por dois métodos, ou se medem os ângulos um a um e de forma independente, ou se observam todas as direcções que formam os ângulos. Esses métodos são: o **método dos giros do horizonte**, para a observação de direcções; e para a medição de ângulos, o **método dos ângulos independentes e justapostos** e o **método de Shcriber**. A diferença entre estes dois métodos de medição de ângulos reside no facto de no primeiro medirem-se apenas os ângulos justapostos, e no segundo medirem-se todas as combinações possíveis de ângulos.

O método das direcções ou dos giros do horizonte é o mais utilizado entre nós. Consiste na observação das n direcções do giro, com referência (direcção de origem da reiteração) interna ou externa ao giro. Com as direcções observadas também se podem deduzir os ângulos justapostos.



- N_C - Direcção do Norte cartográfico ou do rumo verdadeiro nulo;
 N_O - Direcção da leitura horizontal nula (zero do limbo);
 R_O - Rumo de orientação do giro;
 P - Ponto estação a coordenar;
 $A_1, \dots, A_n$ - pontos visados com coordenadas conhecidas;
 $l_1, \dots, l_n$ - direcções observadas para cada ponto visado pelo método dos giros do horizonte.

Figura 4.5 - Giro do horizonte com referência interna.

Em qualquer dos métodos pode-se verificar a independência das observações, condição sempre procurada pelos observadores e experimentalistas, pois ela possibilita a simplificação dos métodos de cálculo e estimação, visto não implicar qualquer correlação entre as observações.

Porque o método dos giros do horizonte se torna mais fácil de observar e porque, em termos de cálculo, o modelo matemático também é mais simples, deve-se utilizar como metodologia operatória a combinação desse método com os métodos de reiteração e de observações encruzadas. Embora, por vezes, na prática o método dos ângulos independentes e justapostos se possa revelar mais vantajoso.

4.3.3 Cálculo e ajustamento com observações redundantes

A resolução e cálculo da intersecção inversa com observações redundantes pode ser feito a partir do cálculo da média das soluções de todas as combinações de 3 direcções, utilizando as fórmulas (4.3.2) e (4.3.3). Esta solução, embora aceitável, não é de todo a mais precisa.

O ajustamento pelo método dos Mínimos Quadrados deve ser aplicado sempre que haja observações superabundantes. A sua solução é precisa, isto é, é uma solução de variância mínima pois minimiza a soma do quadrado dos resíduos ($\phi = \sum v_i^2 = \min$, onde v_i – os resíduos são a diferença entre o valor ajustado e o valor observado). A solução resulta da resolução de um sistema linear de equações de observação que relaciona os parâmetros do sistema - coordenadas do ponto e observações (direcções azimutais).

Método dos mínimos quadrados aplicado à intersecção inversa

Estabeleça-se então, a seguinte relação de observação:

$$R_{\vec{P} \vec{A}_i} = R_i = R_o + l_i \quad (4.3.7)$$

onde

$$R_i = \arctg \frac{M_i - M_p}{P_i - P_p} \quad (4.3.8)$$

Igualando as relações obtemos a equação genérica de observação (também designada por equação de condição) :

$$l_i + R_o - \arctg \frac{M_i - M_p}{P_i - P_p} = 0 \Big|_{(i=1,n)} \quad (4.3.9)$$

ou seja

$$f_i(l_i, R_o, M_p, P_p) = 0 \Big|_{i=1,...,n} \quad (4.3.10)$$

$$\Leftrightarrow F(l_1, \dots, l_n, R_o, M_p, P_p) = 0 \Leftrightarrow F(\hat{Z}) = 0$$

onde R_o, M_p, P_p são os valores desconhecidos, incógnitas ou parâmetros do sistema, l_i são as observações de direcção efectuadas para cada visada, (P_i, M_i) são as coordenadas conhecidas dos pontos visados, e o símbolo $\wedge$ representa uma variável a estimar ou uma observação eivada de erros.

Temos então, $\mathbf{n}_0 = 3$ parâmetros e $\mathbf{n}$ variáveis observadas ($l_i, i=1, \dots, n$). Existindo redundância sempre que $\mathbf{n} > \mathbf{n}_0$, descrita pela diferença $\mathbf{r} = \mathbf{n} - \mathbf{n}_0$.

Pela aplicação do método dos mínimos quadrados, a precisão das observações ajustadas l_i é dada por $\sigma = \sqrt{(\Sigma v^2 / (n - n_0))}$. Esta traduz o seguinte: quanto maior for a redundância, maior será a precisão dos resultados.

Como as $\mathbf{n}$ funções $\mathbf{f}_i$ são não lineares, há que proceder à sua linearização a fim de se obter um sistema de equações lineares que é resolvido pelas conhecidas regras algébricas.

Aplicando o desenvolvimento em série de potências à função $F(Z)$ em torno do ponto $Z^o \neq 0$, e truncando a série a partir dos termos de segunda ordem, tem-se

$$F(Z) \cong F(Z^o) + \left. \frac{\partial F}{\partial Z} \right|_{Z=Z^o} \Delta Z$$

onde $Z = Z^o + \Delta Z$. Fazendo a substituição na segunda expressão da relação (4.3.10) e especificando o vector Z , pode-se escrever:

$$F(l_1^o, \dots, l_n^o, R_o^o, X_p^o, Y_p^o) + \left. \frac{\partial F}{\partial Z} \right|_{Z=Z^o} \Delta Z = 0 \quad (4.3.11)$$

com as seguintes definições:

$$\bullet \Delta Z = [v_1, \dots, v_n, \Delta \hat{R}_0, \Delta \hat{X}_P, \Delta \hat{Y}_P]^T = [V^T \Delta^T]^T = \begin{bmatrix} V \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

onde V é o vector dos resíduos (correções às observações) e Δ o vector de estimativas das correções aos valores iniciais dos parâmetros;

$$\bullet F(Z^o) = \left[l_i + R_o^o - \arctg \frac{\Delta M_i}{\Delta P_i} \right]_{i=1,n} = [f_1(Z^o) \dots f_n(Z^o)]^T = -L_{n \times 1} \quad (4.3.13)$$

é o vector independente do sistema, calculado com os seguintes valores iniciais:

$l_i^o = l_i \rightarrow$ direcções observadas

$M_p^o, P_p^o \rightarrow$ valores calculados pela fórmula (4.3.6) usando quaisquer 3 direcções

$R_o^o = \arctg \left(\frac{M_K - M_P^o}{P_K - P_P^o} \right) - l_K \rightarrow$ calculado com uma direcção K qualquer;

$$\bullet \left. \frac{\partial F}{\partial Z} \right|_{Z=Z^o} = [AB]_{n, (n+3)} \quad \text{é a matriz jacobiana da função } F, \text{ com}$$

$$B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial R_o} \quad \frac{\partial f_i}{\partial M_P} \quad \frac{\partial f_i}{\partial P_P} \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ Z=Z^o}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial f_1}{\partial M_P} & \frac{\partial f_1}{\partial P_P} \\ 1 & \frac{\partial f_2}{\partial M_P} & \frac{\partial f_2}{\partial P_P} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{\partial f_n}{\partial M_P} & \frac{\partial f_n}{\partial P_P} \end{bmatrix}$$

$$\text{e,} \quad A = \left[\left. \frac{\partial f_i}{\partial l_j} \right|_{Z=Z^o} \right]_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

$$\text{em que} \quad \left. \frac{\partial f_i}{\partial M_P} \right|_{Z=Z^o} = \frac{\Delta P_i}{(D_i^o)^2} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial f_i}{\partial P_P} \right|_{Z=Z^o} = -\frac{\Delta M_i}{(D_i^o)^2} \quad (4.3.14)$$

$$\text{com } D_i^o = \sqrt{(M_i - M_P^o)^2 + (P_i - P_P^o)^2};$$

obtem-se o seguinte sistema linear de equações de observação:

$$-L + \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \Delta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow B\Delta = L - V \quad (4.3.15)$$

A determinação da solução de ajustamento por mínimos quadrados resulta da imposição da condição de minimização da função $\phi = V^T P V$ (soma ponderada do quadrado dos resíduos). Desta condição resulta o seguinte sistema normal formado por três equações:

$$(B^T P B) \Delta = (B^T P) L \Leftrightarrow N \Delta = -U \quad (4.3.16)$$

com $N = B^T P B$, a matriz do sistema de equações normais, U vector dos termos independentes e P a matriz peso das observações.

Não sendo as observações correlacionadas, isto é, independentes, vem

$$P = Q_{ll}^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_{ll}^{-1} = \frac{\sigma_0^2}{\text{diag}(\sigma_{l1}^2, \dots, \sigma_{ln}^2)};$$

onde Q_{ll} é a matriz cofactor e Σ_{ll} a matriz das variâncias σ_l^2 . Considerando ainda, as observações de igual precisão ($\sigma_{li}^2 = \sigma_{lj}^2$, $i \neq j$) e a variância de referência $\sigma_0^2 = \sigma_l^2$, vem que $P = I_n$ - matriz identidade de dimensão n . Portanto, o sistema de equações normais com estas considerações, reduz-se a

$$(B^T B) \Delta = (B^T) L \Leftrightarrow N \Delta = -U \quad (4.3.17)$$

de onde resultará o vector solução por:

$$\Delta = -N^{-1} U$$

O cálculo dos resíduos é feito pela seguinte relação, deduzida de (4.3.15):

$$V = L - B \Delta \quad (4.3.18)$$

Os resíduos são as correcções que se devem fazer às direcções observadas, de modo a obter-se as direcções ajustadas correspondentes à solução estimada; direcções essas que correspondem à solução encontrada, ou seja, que respeitam a condição dos mínimos quadrados.

A estimativa à posteriori da variância de referência (σ_0^2) é dada, com $P = I_n$, por:

$$s_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} = \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (4.3.19)$$

Como se considerou para variância de referência *à priori* valor $\sigma_0^2 = \sigma_l^2$, a variância das observações, S_0 representa a precisão de uma observação simples, isto é, a precisão de uma qualquer direcção.

A precisão dos parâmetros estimados (R_0 , P_p , M_p) saem da matriz das variâncias e covariâncias à posteriori dos parâmetros, dada por

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\Delta\Delta} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{R_0}^2 & \hat{\sigma}_{R_0 M_p} & \hat{\sigma}_{R_0 P_p} \\ " & \hat{\sigma}_{M_p}^2 & \hat{\sigma}_{M_p P_p} \\ " & " & \hat{\sigma}_{P_p}^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.20)$$

Fazendo-se n reiterações, elas devem processar-se individualmente, de modo a poder-se analisar as direcções de cada uma delas. Depois desse processamento, resultando n soluções, deve-se adoptar um critério adequado de determinação dos valores finais da solução da intersecção inversa.

Pode-se obter a solução final de duas formas, ou através da média ponderada das soluções das n reiterações, ou reduzindo-se as n reiterações à primeira reiteração através de uma translação angular, fazendo-se depois, para cada direcção, a média ponderada dos n valores reduzidos. A solução final deste segundo método resulta do ajustamento do conjunto das médias das direcções reduzidas, designada por reiteração média. Ela é ainda, a justificação de se utilizar o método dos giros do horizonte com referência externa, onde a respectiva direcção serve apenas para, iniciar e finalizar os giros, para sobre ela serem reduzidas as n reiterações e permitir, desse modo, a independência das observações.

Este tipo de tratamento permite também, a determinação do rumo de uma dada direcção desconhecida, observada simultaneamente com as direcções da intersecção inversa, para, por exemplo, se proceder a um transporte de coordenadas. Resultando o seu rumo pela adição do rumo da origem do limbo - R_0 à direcção - l_i observada para essa direcção desconhecida, ou seja,

$$R_{PI} = R_0 + l_{PI} \quad (4.3.21)$$

4.4 Irradiada sucessiva

Entende-se por *irradiada sucessiva*, o método de observação que possibilita o transporte sucessivo de coordenadas através de pontos intermédios, onde em cada um dos quais são executadas irradiadas simples. O conjunto de pontos intervenientes observados desta forma constituem uma poligonal livre ou solta, sendo esta uma outra designação habitualmente usada para este tipo de irradiação.

A poligonal diz-se livre por não existir nenhum constrangimento às observações no ponto final ou de chegada; ou seja, por não serem conhecidos nesse ponto nem rumo nem as respectivas coordenadas.

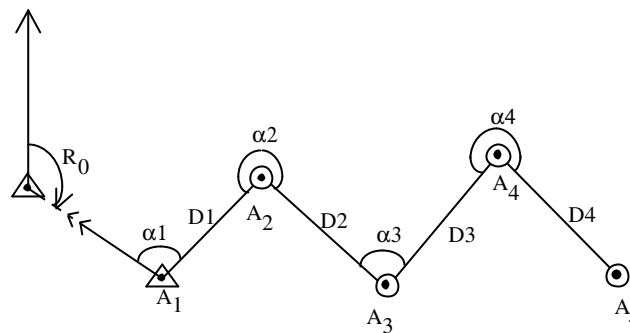


Figura 4.6 - Irradiada sucessiva.

Para uma poligonal com n pontos (mais um de partida), devem-se medir n ângulos azimutais e n distâncias, resultando para o respectivo transporte de rumos as seguintes expressões:

$$R_n = R_{n-1} + \alpha_n - \Pi \quad \text{e}$$

$$R_K = R_0 + \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \Pi) = R_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i - k\Pi \quad (4.4.2)$$

Para o transporte das coordenadas, tem-se:

$$M_n = M_{n-1} + \Delta M_n = M_{n-1} + D_n \sin R_n$$

$$P_n = P_{n-1} + \Delta P_n = P_{n-1} + D_n \cos R_n \quad (4.4.3)$$

e

$$M_k = M_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta M_i = M_1 + \sum_{i=1}^{k-1} D_i \sin R_i$$

$$P_k = P_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta P_i = P_1 + \sum_{i=1}^{k-1} D_i \cos R_i \quad (4.4.4)$$

À semelhança da irradiada simples, também aqui as distâncias presentes nas expressões são distâncias cartográficas, pois as expressões traduzem relações geométricas sobre o plano cartográfico ou sobre um outro plano qualquer de projecção.

4.4.1 Redução das observações

As observações de ângulos e distâncias efectuadas à superfície terrestre devem ser sujeitas a reduções ao plano cartográfico, muito embora as correcções feitas aos ângulos resultantes dessa redução revelem-se insignificantes quando aplicadas ao nível do campo topográfica. As correcções aos ângulos, dado o seu reduzido valor absoluto, são efectuadas apenas no campo da Geodesia. Para os comprimentos já o mesmo não se passa, pois mesmo para lados pequenos (ordem topográfica) essas correcções já poderão ser significativas. Esta significância dependerá, como é óbvio, da precisão do levantamento, da própria distância e da altitude do ponto estação.

Para obter a distância cartográfica, deve-se proceder às seguintes reduções aplicadas à distância verdadeira e inclinada:

- redução ao plano horizontal do ponto estação

$$D_H = D_V \sen Z \quad (4.4.5)$$

- redução ao elipsóide (devido à altitude do ponto estação)

$$D_O = D_H - D_H \frac{H}{R} \quad (4.4.6)$$

(H- altitude do ponto estação; R=6371Km - raio médio da Terra)

- redução ao plano cartográfico Hayford-Gauss do Datum Lisboa

$$D_C = D_O + 41018 \times 10^{-19} (M_E^2 + M_E M_V + M_V^2) \times D_O \quad (4.4.7)$$

Quando a distância medida entre os pontos é obtida indirectamente por processo electromagnético (usando distanciómetros electrónicos), há ainda que ter em conta a respectiva correcção atmosférica. Para o caso dos distanciómetros que usam o processo de diferença de fase, esta correcção é aditiva, pois o efeito sofrido pelo sinal no meio de propagação é um atraso na fase, o que origina uma distância aparentemente mais curta. Esta correcção depende da densidade do meio de propagação, portanto será função da pressão atmosférica e da temperatura média do ar. Os aparelhos mais recentes (estações totais modernas) processam automaticamente esta correcção, sendo necessário para isso introduzir na sua memória os respectivos valores médios de pressão e temperatura.

Como exemplo, duas expressões que corrigem as distâncias observadas:

- Para o caso do distanciómetro Wild DI1001

$$D_V = D_{obs} + \left[281,8 - \frac{0,29065P}{1 + 0,00366T} \right] D_{obs} \quad (P \text{ em mb, } T \text{ } ^\circ\text{C}) \quad (4.4.8)$$

É de notar que para certas regiões e para curtas distâncias todas estas correcções, ou parte delas, podem-se tornar irrelevantes. É o caso da correcção atmosférica para curtas distâncias, em zona de baixa altitude e com temperaturas médias, onde a correcção é da ordem de 1mm/100m; é também o caso da correcção cartográfica junto ao meridiano central de projecção para o caso de projecções tangentes; e ainda, o caso da correcção de redução ao elipsóide para zonas de baixa altitude, para H<100m a correcção é inferior a -1.5mm/100m.

Os aparelhos modernos estão munidos de uma função (factor de escala) que pode, quando previamente determinada, atender à soma de todas as correcções em ppm e reduzir automaticamente os comprimentos observados à respectiva distância cartográfica.

4.4.2 Lei geral de propagação dos erros

Dada uma função do tipo $f(x,y,z)$, sobre a qual se conhecem as variâncias e covariâncias das variáveis (x,y,z) , qual será a variância da função f num determinado ponto (x_0,y_0,z_0) ? Seja o diferencial da função f dado por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (4.4.9)$$

se quadrarmos esta expressão e substituirmos os factores d^2 por σ^2 e $dx dx$ por σ_{xy} (covariâncias), obtemos a pretendida variância, dada por:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \text{cov} \quad (4.4.10)$$

Os termos das covariâncias (cov) traduzem a correlação entre as variáveis. Nos casos de não existir essa correlação, ou seja, (x,y,z) serem variáveis aleatórias independentes, esse termo é nulo.

Vamos supor que para a função $F=(f_1,f_2)$ definida por

$$f_1=M_k=M_p+D_{kp}\text{sen}R; \quad f_2=P_k=P_p+D_{kp}\text{cos}R_{kp}$$

não existe correlação entre as variáveis (M,P,D,R) , então dadas as variâncias σ_{Mp}^2 , σ_{Pp}^2 , σ_{Dkp}^2 , σ_{Rkp}^2 , a variância da função F será dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{f_1}^2 &= \sigma_{Mp}^2 + \text{sen}^2 R_{kp} \sigma_{D_{kp}}^2 + D_{kp}^2 \cos^2 R_{kp} \sigma_{R_{kp}}^2 \\ \sigma_{f_2}^2 &= \sigma_{Pp}^2 + \cos^2 R_{kp} \sigma_{D_{kp}}^2 + D_{kp}^2 \text{sen}^2 R_{kp} \sigma_{R_{kp}}^2 \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Para o caso de irradiadas sucessivas, as variâncias de $F_i=(f_{i1},f_{i2})$ serão dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{f_{i1}}^2 &= \sigma_{M_1}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} (\text{sen}^2 R_k \sigma_{D_k}^2 + D_k^2 \cos^2 R_k \sigma_{R_k}^2) \\ \sigma_{f_{i2}}^2 &= \sigma_{P_1}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} (\cos^2 R_k \sigma_{D_k}^2 + D_k^2 \text{sen}^2 R_k \sigma_{R_k}^2) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

que, se considerarmos $\text{sen}R = \Delta M/D$ e $\text{cos}R = \Delta P/D$, também podemos escrever

$$\begin{aligned}\sigma_{f_{i1}}^2 &= \sigma_{M_1}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\left(\frac{M_{K+1} - M_K}{D_K} \right)^2 \sigma_{D_K}^2 + (P_{K+1} - P_K)^2 \sigma_{R_K}^2 \right) \\ \sigma_{f_{i2}}^2 &= \sigma_{P_1}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\left(\frac{P_{K+1} - P_K}{D_K} \right)^2 \sigma_{D_K}^2 + (M_{K+1} - M_K)^2 \sigma_{R_K}^2 \right)\end{aligned}\quad (4.4.13)$$

O problema pode também ser apresentado sob a forma matricial para funções lineares $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$. Dada uma função do tipo

$$F = A X \quad (4.4.14)$$

e dada a matriz das variâncias e covariâncias B_X do vector X , a matriz das variâncias e covariâncias da função F será dada por

$$B_F = A B_X A^T \quad (4.4.15)$$

Para funções não lineares, a matriz das variâncias e covariâncias será dada por

$$B_F = J_F B_X J_F^T \quad (4.4.15)$$

onde J_F é a matriz jacobiana (matriz das derivadas parciais de 1ª ordem) da função F .

4.5 Posicionamento por Satélite

Os Sistemas de Posicionamento por Satélite (GPS, GLONASS e GALILEU) possibilitam dois tipos de observações, o desfasamento temporal do código que resulta na pseudo-distância e a diferença de fase.

A observação do código não é mais que a determinação do desfasamento do código (P ou CA), correspondente ao tempo de percurso do sinal, desde o ponto de emissão (satélite) até ao ponto de recepção (receptor), a menos dos erros dos relógios e dos atrasos atmosféricos. A pseudo-distância resultante, é então dada por:

$$P = \Delta T * C \Leftrightarrow P = (t_k - t^p) * C \quad (4.5.1)$$

onde C é a velocidade de propagação do sinal (velocidade da luz), t_k é o instante do relógio do receptor k e t^p é o instante do relógio do satélite p .

A seguinte equação estabelece a relação entre a diferença dos estados dos relógios e a distância do receptor ao satélite:

$$\left[(t_k - dt_k) - (t^p - dt^p) \right] * C = \rho_k^p + I_k^p + T_k^p \quad (4.5.2)$$

onde dt representa os atrasos dos relógios, ρ_k^p é a distância verdadeira do receptor k ao satélite p , I e T são os efeitos atmosféricos, respectivamente, o atraso nas camadas da ionosféra e da troposféra. Porque a medição de desfasamento dos códigos está eivada de erros e traduz a distância percorrida pelo sinal do satélite, o primeiro membro da equação (4.5.2) designa-se por pseudo-distância.

Isolando o valor da pseudo-distância e, considerando

$$\begin{aligned} - \rho_k^p &= \sqrt{(X^p - X_k)^2 + (Y^p - Y_k)^2 + (Z^p - Z_k)^2} \\ - I_k^p, T_k^p \text{ e } dt^p &\text{ insignificantes} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

para quatro satélite observados simultaneamente e, para uma só época, o sistema de equações que nos dá as coordenadas da estação k será dado por:

$$\begin{aligned} P_k^1 &= \sqrt{(X^1 - X_k)^2 + (Y^1 - Y_k)^2 + (Z^1 - Z_k)^2} + Cdt_k \\ P_k^2 &= \sqrt{(X^2 - X_k)^2 + (Y^2 - Y_k)^2 + (Z^2 - Z_k)^2} + Cdt_k \\ P_k^3 &= \sqrt{(X^3 - X_k)^2 + (Y^3 - Y_k)^2 + (Z^3 - Z_k)^2} + Cdt_k \\ P_k^4 &= \sqrt{(X^4 - X_k)^2 + (Y^4 - Y_k)^2 + (Z^4 - Z_k)^2} + Cdt_k \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

sendo o conjunto das quatro incógnitas definido por (X_k, Y_k, Z_k, dt_k) .

Observando-se mais do que quatro satélites passamos a ter redundância de observações e a determinação dos parâmetros poderá ser feita por ajustamento.

Para cada época resulta um conjunto de coordenadas (X, Y, Z) e uma correcção dt_k ao relógio do receptor. Observando várias épocas, o **posicionamento absoluto** para a estação pode ser dado pela média dos vários conjuntos de coordenadas resultantes de cada época, ou como resultado de um ajustamento.

As coordenadas através deste tipo de posicionamento resultam com uma precisão na ordem 4 a 10 metros. Até há bem pouco tempo, essa precisão era, no sistema GPS, da ordem dos 50 a 100 metros devido à existência de uma degradação do sinal introduzida intencionalmente no sistema, o chamado acesso selectivo (AS).

Para a resolução do sistema de equações de observação, o receptor conta com as efemérides dos satélites, difundidas através do sinal, para com elas determinar as coordenadas (X^p, Y^p, Z^p) dos satélites no instante (época) de observação.

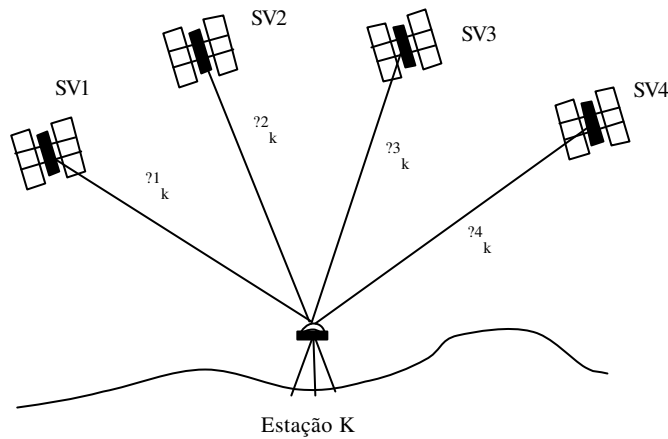


Figura 4.7 – Posicionamento absoluto.

Factores DOP

Os factores DOP (Dilution of Precision) traduzem a precisão do posicionamento, ou seja, traduzem a boa ou má intersecção dos raios vector com origem nos satélites sobre a posição do receptor. Quando os valores dos factores DOP são baixos, então, o posicionamento resultante é preciso, existe portanto uma boa intersecção. Numa outra forma de interpretar, podem-se também relacionar os factores DOP com o volume da figura formada pelas posições dos satélites e do receptor; e quanto maior for esse volume maior é a dispersão dos satélites, melhor será a intersecção e mais preciso será o posicionamento.

Estes factores não são mais do que simples funções dos elementos da diagonal da matriz das covariâncias do sistema de equações de observação, ou seja, são meras funções das variâncias dos parâmetros do sistema de equações do posicionamento absoluto.

Considerando o sistema de equações de posicionamento (4.5.4) linearizado e do tipo

$$A X = Y$$

então a matriz das covariâncias dos parâmetros é dada por

$$Q_X = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} & \sigma_{XT} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} & \sigma_{YT} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2 & \sigma_{ZT} \\ \sigma_{XT} & \sigma_{YT} & \sigma_{ZT} & \sigma_T^2 \end{bmatrix} \quad (4.5.5)$$

que depois de convertida para o sistema de coordenadas geodésicas locais $(N,E,H) \Leftrightarrow (M,P,H)$, tem a forma de

$$Q_X = \begin{bmatrix} \sigma_N^2 & \sigma_{NE} & \sigma_{NH} & \sigma_{NT} \\ \sigma_{NE} & \sigma_E^2 & \sigma_{EH} & \sigma_{ET} \\ \sigma_{NH} & \sigma_{EH} & \sigma_H^2 & \sigma_{HT} \\ \sigma_{NT} & \sigma_{ET} & \sigma_{HT} & \sigma_T^2 \end{bmatrix}$$

A partir dos elementos desta matriz formam-se então os factores DOP da seguinte forma:

$$VDOP = \sigma_H \text{ (factor de precisão vertical)}$$

$$HDOP = \sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_P^2} \text{ (factor de precisão horizontal)}$$

$$PDOP = \sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_P^2 + \sigma_H^2} \text{ (factor de precisão da posição espacial)}$$

$$TDOP = \sigma_T \text{ (factor de precisão do tempo)}$$

$$GDOP = \sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_P^2 + \sigma_H^2 + \sigma_T^2} \text{ (factor de precisão global)}$$

A grandeza dos valores dos factores DOP é, também, função do número de satélites e das suas posições em relação à vertical do ponto estação.

Para o posicionamento relativo determinado a partir do código, o valor do PDOP deverá ser inferior a 12 e para o posicionamento determinado a partir da diferença de fase, deverá ser inferior a 7 ou a 5.

4.5.1 Posicionamento Relativo

O posicionamento relativo é um processo de posicionamento que passa pela determinação do vector posição, com origem no ponto de coordenadas conhecidas (estação base) e extremidade no ponto para o qual se pretende determinar as coordenadas.

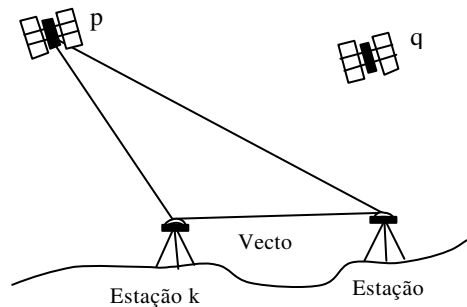


Fig.4.8 - Posicionamento relativo.

Conhecidas as coordenadas de um ponto estação **k**, o que é equivalente a ser conhecido o seu vector posição ($\rho_k = \rho_k(X,Y,Z)$) e depois de determinado o vector que une a estação **k** à uma estação **m** ($\Delta\rho_{km} = \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$), então a posição da estação **m** será determinada por

$$(X_m, Y_m, Z_m) = (X_k, Y_k, Z_k) + (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z) \quad (4.5.6)$$

Posicionamento relativo com medição de código (Correcção Diferencial)

O processo de posicionamento relativo através do código é normalmente designado pelo método diferencial ou da correcção diferencial.

Considerem-se as seguintes relações, respectivamente, para a estação k e estação m , relativas a um satélite p e a uma dada época T :

$$\begin{aligned} \rho_k^p &= P_k^p - Cdt_k \\ \rho_m^p &= P_m^p - Cdt_m \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Sendo a estação k a estação de referência, conhecem-se as suas coordenadas exactas, logo também, as suas distâncias verdadeiras $\bar{\rho}_k^p$ aos satélites observados. Fazendo a diferença entre as distâncias observadas para cada época e as distâncias verdadeiras, obtém-se a chamada *correcção diferencial*

$$\Delta D_k^p = \rho_k^p - \bar{\rho}_k^p = P_k^p - Cdt_k - \bar{\rho}_k^p \quad (4.5.8)$$

Considerando que para distâncias curtas (< 20 Km), a diferença entre uma qualquer distância observada e a respectiva distância verdadeira entre um receptor e um satélite é a mesma, então, se aplicar-mos a correcção diferencial determinada por (4.5.8) às pseudo-distâncias observadas na estação m , estação móvel ou a coordenar, obtém-se a seguinte relação de observação

$$P_m^p - \Delta D_k^p = \bar{\rho}_m^p - Cdt_m \quad (4.5.9)$$

Para 4 satélites ($p=1, \dots, 4$), determinam-se as quatro correcções diferenciais a partir da estação k , com as quais se formula o seguinte sistema de equações relativamente à estação m

$$\begin{aligned} P_m^1 - \Delta D_k^1 &= \sqrt{(X^1 - X_m)^2 + (Y^1 - Y_m)^2 + (Z^1 - Z_m)^2} - Cdt_m \\ P_m^2 - \Delta D_k^2 &= \sqrt{(X^2 - X_m)^2 + (Y^2 - Y_m)^2 + (Z^2 - Z_m)^2} - Cdt_m \\ P_m^3 - \Delta D_k^3 &= \sqrt{(X^3 - X_m)^2 + (Y^3 - Y_m)^2 + (Z^3 - Z_m)^2} - Cdt_m \\ P_m^4 - \Delta D_k^4 &= \sqrt{(X^4 - X_m)^2 + (Y^4 - Y_m)^2 + (Z^4 - Z_m)^2} - Cdt_m \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Resolvendo este sistema de equações pelo método dos mínimos quadrados, obtém-se as coordenadas para a estação m e o respectivo erro do relógio, dt_m .

Este é um dos algoritmos possíveis para a determinação da correcção diferencial, no posicionamento relativo com a chamada observação do código.

O posicionamento relativo com observação do código pode ser realizado com dois receptores de código ou com um receptor de frequência simples ou dupla (L1/L2) na estação base e um receptor de código na estação móvel, já que os receptores medidores de diferença de fase também medem o código.

Posicionamento relativo com medição de diferença de fase

Partindo da comparação de fase das ondas portadoras (L1 ou L2), entre a onda produzida no receptor e a onda emitida pelo satélite e recebida no receptor, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\varphi_k^p(t) = \varphi^p(t) - \varphi_k(t) + N_k^p(1) + \text{ruído} \quad (4.5.11)$$

em que

$\varphi_k^p(t)$ - diferença de fase observada em unidades de ciclo, uma função acumulativa dos ciclos inteiros da onda produzida

$\varphi^p(t)$ - fase do sinal do satélite no instante de recepção

$\varphi_k(t)$ - fase do sinal do receptor no instante de recepção

$N_k^p(t)$ - ambiguidade inteira, que representa o número de ciclos (comprimentos de onda) correspondentes ao percurso do sinal, desde o satélite até ao receptor e no instante relativo à época inicial

ruído - termo relativo aos erros dos relógios e da atmosfera.

A variável $\varphi_k^p(t)$ é a observação propriamente dita, efectuada pelo receptor com uma precisão de 1/100 ciclo ($\approx 0,2\text{mm}$), que pelo facto de ser acumulativa, incrementa o número de ciclos de oscilação do sinal. Este facto provoca por vezes um tipo específico de erro, os chamados **saltos de ciclo**, são descontinuidades na acumulatividade da função. São provocados, quer pela esporádica e curta perda do sinal, quer por razões de hardware. São possíveis de ser eliminados no tratamento das observações, utilizando-se para isso certos e adequados algoritmos, mas causam por vezes certos incómodos quando aparecem em grandes quantidades ou quando são muito pequenos, por exemplo, saltos de um ciclo.

A relação entre a distância verdadeira, do receptor ao satélite e a observação de diferença de fase é dada por

$$\rho_k^p(t) + \text{ruído} = \lambda \varphi_k^p(t) \quad (4.5.12)$$

onde λ é o comprimento da onda L observada e ρ é a designada distância topocêntrica. Esta distância verdadeira não pode ser calculada directamente enquanto não for determinado o valor da

ambiguidade inicial N_k^p . É por essa razão que normalmente o tratamento das observações de diferença de fase é feito à posteriori, já que em tempo real ou em tempo útil a resolução de ambiguidades é um processo difícil. Contudo, hoje em dia já existem algoritmos em sistemas de receptores que permitem o chamado método cinemático em tempo real (RTK – *Real Time Kinematics*).

A fase do sinal do satélite chega atrasada ao receptor devido à distância percorrida e aos efeitos atmosférico, por isso podemos escrever

$$\varphi^p(t) = \varphi_T^p(t - \tau)$$

ou seja, a fase no instante de recepção é igual à fase de emissão num instante ligeiramente anterior ($t - \tau$), desfasado exactamente do tempo de percurso - τ . Desenvolvendo a fase φ_T^p em série de potências e considerando a sua primeira derivada em ordem ao tempo igual à frequência do sinal

$$\dot{\varphi}^p = f^p$$

então,

$$\varphi^p(t) = \varphi_T^p(t) - f\tau$$

Fazendo $\tau = \rho_k^p(t)/C$, temos que

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_T^p(t) - \frac{f\rho_k^p(t)}{C} - \varphi_k(t) + N_k^p \quad (4.5.13)$$

Considerando-se uma observação simultânea em dois receptores, k e m , do sinal proveniente de um satélite p , onde resultam os valores de φ_k^p e φ_m^p e, fazendo a diferença entre estas observações, obtemos o que se chama **diferença simples da fase observada**:

$$\begin{aligned} \Delta_{km}^p &= \varphi_k^p(t) - \varphi_m^p(t) \\ &= -\frac{f}{C} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] - [\varphi_k(t) - \varphi_m(t)] + N_{km}^p \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

em que, $N_{km}^p = N_k^p - N_m^p$ e a fase de emissão do sinal $\varphi_T^p(t)$ foi cancelada.

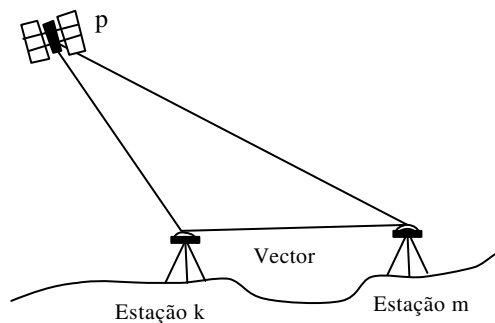


Fig.4.9 - Observação de diferenças simples de fase.

Considere-se agora a observação simultânea de dois satélites, p e q, pelos dois receptores k e m. Partindo das diferenças simples de fase Δ_{km}^p e Δ_{km}^q e, sobre elas efectuar nova diferença, obtêm-se as **diferenças duplas da fase observada**,

$$\begin{aligned}\Delta_{km}^{pq} &= \Delta_{km}^p - \Delta_{km}^q \\ &= -\frac{f}{C} \{ [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] - [\rho_k^q(t) - \rho_m^q(t)] \} + N_{km}^{pq}\end{aligned}\quad (4.5.15)$$

em que, $N_{km}^{pq} = N_{km}^p - N_{km}^q$ e se verifica o cancelamento das fases do sinal dos receptores, $\phi_k(t)$ e $\phi_m(t)$.

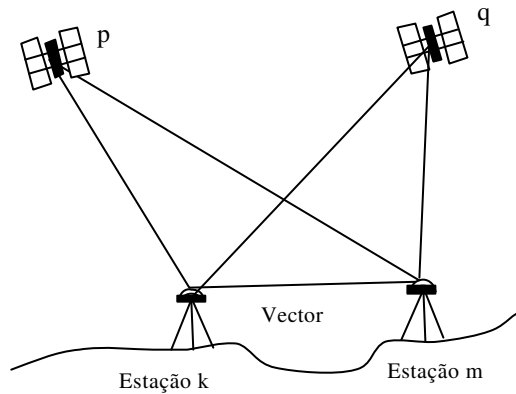


Fig.4.10 - Observação de diferenças duplas de fase

Pode-se obter ainda as **diferenças triplas**, onde para tal, se considera a configuração anterior de dois receptores e dois satélites em duas épocas sucessivas t e t+1, ou seja, a diferença de duas diferenças duplas

$$\nabla_{km}^{pq} = \Delta_{km}^{pq}(t+1) - \Delta_{km}^{pq}(t) \quad (4.5.16)$$

Facilmente se verifica nesta combinação de observações o cancelamento do termo das quatro ambiguidades iniciais. Além de apresentar esta vantagem, as diferenças triplas são observações onde os saltos de ciclo apenas afectam a observação relativa à época da sua ocorrência, isto quer dizer que nas restantes épocas as observações não estão afectas deste erro. Isto leva a que se possam considerar os saltos de ciclo como resíduos, e deste modo, permitir a sua quantificação e consequente eliminação.

Na formulação do sistema de equações de observação há que ter em conta o número de satélites (S), o número de receptores (R) e o número de épocas (T) no seu dimensionamento.

Assim, temos em termos de número de equações:

R*S*T - para observações de diferença de fase				
(R-1)*S*T -	"	"	"	simples
(R-1)*(S-1)*T -	"	"	"	duplas
(R-1)*(S-1)*(T-1) -	"	"	"	tripas

O número de incógnitas do sistema será definido por: $3*(R-1)$ - coordenadas das estações livres e $S-1$ - ambiguidades iniciais.

Como exemplo e fixando os valores de $R=2$, $S=5$ e $T \geq 2$:

diferenças duplas	diferenças triplas
$N = (5-1)*T \geq 8$ $N_O = 3+(5-1) = 7$	$N = (5-1)*(T-1) \geq 4$ $N_O = 3$

Os três tipos de observações formadas à custa das diferenças de fase observada, podem ser comparadas em algumas características, descritas no quadro seguinte.

	efeitos eliminados	efeitos reduzidos	ambiguidades
dif. simples	erros do relógio satélite de 1ª ordem	Ionos., Tropos. em bases pequena	S
dif. duplas	erros do relógio satélite e receptor de 1ª	"	S
dif. triplas	"	"	N

Um dos algoritmos que se pode apresentar para o tratamento das observações de diferença de fase, através de um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, é o seguinte:

1º - Processamento de diferenças triplas:

- com determinação de uma solução aproximada das coordenadas da estação;
- com a eliminação dos saltos de ciclo através de uma análise dos resíduos.

2º - processamento das diferenças duplas em três fases:

- a) determinar uma segunda solução aproximada
- b) fixar as soluções reais das ambiguidades iniciais a valores inteiros
- c) determinar a solução ótima e final.

A partir das ondas L1 e L2 podem-se formar combinações lineares de modo a obter-mos outras ondas com diferentes características que possibilitem um tratamento mais adequado e a resolução de problemas que persistam em L1 e L2.

As combinações deduzidas são:

- combinação ionosférica $L3 = \alpha L1 + \beta L2$
- banda larga (*wide lane*) $L4 = L1 - L2$
- banda estreita (*narrow lane*) $L5 = L1 + L2$.

Particularmente, a onda da combinação ionosférica é usada no tratamento de bases longas (>20Km), pois permite reduzir ou quase eliminar, o efeito do atraso ionosférico. Para isso foram estudados os melhores coeficientes que possibilitassem tal característica. A *wide lane* é também frequentemente utilizada, porque tem um comprimento de onda maior, de 84cm, o que torna mais fácil a fixação das ambiguidades.

4.5.2 Modos de Observação

Em qualquer tipo de posicionamento, temos sempre dois modos principais de observação, o *modo estático* e o *modo cinemático*. Quanto ao processamento dos dados GPS, ele pode ser em pós-processamento ou em tempo real.

Para o posicionamento absoluto, a posição em modo estático pode ser determinada pela média dos valores resultantes em cada época dentro do período de observação. Em modo cinemático, a estação subentende-se em movimento e o trajecto fica definido pelo conjunto de posições determinadas, cada uma, numa só época ou num só instante de observação. Nesse caso, a densidade de pontos depende da velocidade da estação e do intervalo entre registos.

A precisão do modo cinemático é, actualmente, da ordem dos 5 a 10m em posicionamento absoluto, 1 a 2 m no método diferencial com código e 2 a 10 cm no método diferencial com fase.

Para o posicionamento relativo, o tipo de observação, como já foi referido, pode ser o código ou a fase. Diferindo, como é óbvio, na precisão alcançada.

Podemos, então, fazer a seguinte divisão dos modos de observação:

modo estático: - estático (fase ou código)

- rápido-estático (fases+código)

- pseudo-estático (fase)

modo cinemático: - cinemático contínuo (fase)

- pseudo-cinemático ou stop & go (fase)

- cinemático em tempo real – RTK (fase) e CD (código)

No modo **estático** com o código, deve-se observar de 1 a 5 min ou, de 60 a 120 registos, o PDOP deve ser inferior a 7 e o número mínimo de satélites é quatro. Utilizando a fase, o intervalo de tempo de observação deve ser superior a 30min, dependendo do comprimento do vector, com um intervalo de 5, 10 ou 15 seg entre épocas; o PDOP não deve atingir valores superiores a 7 e o número mínimo de satélites é 3 com fase e 4 com código (excepto se estiver no mar). A precisão com fase é de $1\text{mm} \pm 1\text{ppm}$, no entanto, já existem métodos de tratamento de observações que atingem 0.1mm e 0.01ppm; com código e com correcção diferencial é de $1\text{m} \pm 50\text{ppm}$.

O modo **rápido-estático** não é apenas um método de observação, mas mais um tipo de pós-processamento específico que vai exigir menos tempo de observação e que é aplicável apenas a receptores de dupla frequência. São processadas todas as fases (L1,L2,L3,L4,L5) mais o código; deste modo, é possível diminuir o tempo de observação para 8 a 20 minutos. O número mínimo de satélites é quatro, o intervalo de tempo entre registo deve ser 5 ou 10 seg. Com quatro satélites deve-se observar de 15 a 20min, com cinco satélites deve-se observar de 10 a 15min e com seis ou mais satélites de 8 a 10min. A precisão é inferior à do estático, cerca de $1\text{cm} \pm 2\text{ppm}$, o suficiente para as aplicações geodésicas e topográficas, lembre-se que a precisão da rede de 1ª ordem é de 5ppm. Esta precisão é garantida para bases curtas, até aos 20Km, daí ser um método exclusivo para bases curtas.

O modo **pseudo-estático** é um modo de posicionamento que requer o estacionamento repetido em intervalos de 10min, espaçados entre si com intervalos de cerca de uma hora. Não necessita de manter o seguimento dos sinais dos satélites entre as sessões e é utilizado para coordenar vários pontos situados na mesma zona. Estaciona-se 10min em cada um e volta-se a reestacionar nos mesmos pontos passado algum tempo. Atinge a precisão do centímetro e até de milímetros para bases curtas.

O posicionamento relativo em modo **cinemático contínuo**, com utilização da fase, impõe duas condições: 1- que se parta de uma base conhecida, isto é, que a estação móvel inicie, também, a observação num ponto de coordenadas conhecidas; 2 - que não haja perda de sinal pelo menos em quatro satélites durante todo o percurso. O intervalo entre registos pode ir até a 0.5seg. É usado para levantamento de estradas, delimitação de áreas e outros trabalhos do género. A precisão alcançada é da ordem do decímetro.

O modo **pseudo-cinemático** (stop & go) impõe as mesmas condições no seguimento contínuo de quatro satélites durante o percurso e, a iniciação da observação a partir de uma base conhecida. Aqui, apesar da estação estar também em movimento, o registo de observações é

executado durante alguns segundos (5 a 10seg), em posição estática, apenas nos pontos discretos que se pretende coordenar, tal como se disse atrás, entre estes pontos é necessário não haver perda de sinal de pelo menos 4 satélites.

Para resolver o problema da base conhecida, nos modos de cinemático contínuo e pseudo-cinemático existem três possibilidades, ou se tem dois pontos de coordenadas conhecidas (base conhecida), ou se tem apenas um e coordena-se o segundo antes do início da observação em modo estático, ou ainda, se usa a chamada técnica do switch & swap, a troca de antenas; isto é, tem-se apenas um ponto coordenado, observa-se simultaneamente esse e mais um segundo ponto, procede-se à troca das antenas e volta-se a observar.

O modo *cinemático em tempo real* requer transmissão de dados via rádio, ou via telemóvel, quer em comunicação GSM quer em GPRS. Operando neste modo, temos o designado método RTK (*Real Time Kinematics*) usando observações de fase, e o método de correcção diferencial (CD) usando apenas observações de código. O RTK é aplicável apenas a receptores de dupla frequência, foi o último método a aparecer devido ao tardio aparecimento de algoritmos que permitissem a resolução de ambiguidades em tempo útil - técnica *On The Fly* (OTF). Este método permite a resolução do posicionamento preciso (ao cm) em poucos segundos, e assim, dispensa a iniciação da base e o seguimento contínuo do sinal sem qualquer perda. A técnica OTF permitiu também resolver problema da perda de sinal no modo cinemático contínuo.

Sistemas diferenciais WASS, EGNOS e MSAS

Ao invés do método de posicionamento relativo, no posicionamento absoluto, realizado individualmente por cada receptor, não existe, nem faz sentido falar, na diferença entre modo estático e modo cinemático, já que cada instante de observação conduz a uma posição. Neste método, vale a pena referir os sistemas de correcção diferencial difundida em tempo real através de sistemas de satélites geoestacionários. Os sistemas, WASS americano, EGNOS europeu e MSAS japonês, são sistemas utilizados para aumentar a exactidão do posicionamento absoluto, através do envio de correcções diferenciais calculadas em estações GPS espalhadas pelas respectivas regiões. Na zona de Portugal encontram-se a operar para este sistema duas estações GPS, uma no Sul e outra no Norte do território peninsular.



Figura 4.11 – Componentes do sistema WASS; 1- satélite WASS, 2- estações de observação e de controlo, 3- satélite GPS, e 4- sinal captado pelo utilizador

Os sistemas são utilizados apenas por receptores de navegação, os quais captam os sinais provenientes destes satélites estacionários (emissores de correcções diferenciais regionais) e emitidos na mesma frequência e com a mesma estrutura que os sinais dos satélites de GPS.

Com os receptores existentes no mercado já é possível testar e verificar o ganho, embora que ligeiro, na precisão e exactidão do posicionamento fornecido por este sistema. Estes receptores são de grande utilidade na Topografia para operações de navegação e busca de pontos no terreno, ou em trabalhos de posicionamento de baixo nível de precisão, 2 a 3 metros. Contudo, é nos trabalhos de campo onde é necessário encontrar pontos difíceis (estacas, marcos, etc.) que este tipo de receptores pode ser útil.

5. NIVELAMENTO TOPOGRÁFICO

O nivelamento é a operação de altimetria que permite determinar as distâncias verticais entre planos horizontais, ou entre superfícies de nível (superfícies equipotenciais). Permite ainda, a atribuição de valores de altitude absoluta, por transporte de cotas (altitudes relativas ao nível médio das águas do mar).

Os diversos tipos de nivelamento baseiam-se em diferentes princípios e, consoante o princípio, assim se define o método ou o tipo de nivelamento.

Assim, podem-se definir os seguintes tipos de nivelamento:

- trigonométrico
 - 1- teodolito + distanciómetro e alvo reflector
 - 2- teodolito e estadia
 - 3- taqueómetro e mira
 - 4- taqueómetro auto-redutor e mira;
- geométrico (com níveis);
- barométrico (com altímetro de precisão);
- hidrostático (princípio dos vasos comunicantes).

O nivelamento barométrico é o único que nos dá directamente altitudes absolutas, todos os outros permitem apenas determinar diferenças de altitudes (altitudes relativas). O caso particular do nivelamento hidrostático que nos permite determinar vários pontos pertencentes à mesma superfície (diferenças de altitudes nulas), para o caso de se considerar um único líquido homogéneo.

Destacam-se aqui apenas os dois métodos mais comumente utilizados na topografia, o nivelamento geométrico, de alta e média precisão, e o nivelamento trigonométrico, de baixa precisão. Os valores de precisão normalizados para estas três classes de rigor, são:

- 0,1mm/100m no nivelamento de alta precisão (1 ppm)
- 1mm/100m “ “ “ média “ (10 ppm)
- 1cm/100m “ “ “ baixa “ (100 ppm)

Relativamente ao sistema de referência, origem da contagem das altitudes, consideram-se duas superfícies normalmente utilizadas, a superfície do geóide (altitudes ortométricas ou cotas) e a superfície do elipsóide (altitudes elipsoidais). Como o sistema de altitudes elipsoidais não respeita a geometria das superfícies de nível, muito raramente é utilizado.

5.1 Nivelamento trigonométrico

É um tipo de medição indirecta, onde o desnível é determinado à custa da observação de um ângulo vertical (altura ou distância zenital) e da distância linear que une os pontos, medidos sobre o plano vertical da estação e que contém o ponto visado.

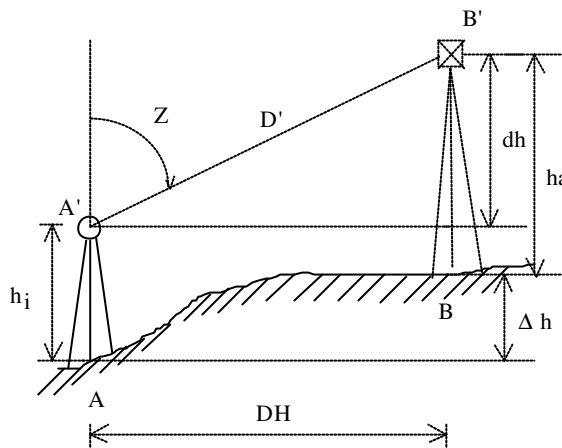


Fig. 5.1 - Nivelamento trigonométrico.

O desnível correspondente à diferença de altitudes dos dois pontos $\Delta h = h_B - h_A$ e é determinado por:

$$\begin{aligned}\Delta h &= dh + h_i - h_a \\ \Delta h &= D' \cos Z + h_i - h_a \\ \Delta h &= D_H \cotg Z + h_i - h_a\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Com a determinação dos desníveis é possível depois proceder-se ao transporte de cotas, quer no sentido directo quer no sentido inverso. Para transportar a cota de um ponto A para um ponto B, se estacionado em A, o transporte dá-se no sentido directo e

$$h_B = h_A + \Delta h$$

se estacionado em B, o transporte dá-se no sentido inverso e

$$h_B = h_A - \Delta h,$$

tendo em conta que o Δh é um valor relativo cujo sinal é dado pela expressão apresentada..

Existem dois fenómenos que influenciam o desnível observado, o efeito da refração atmosférica, que reduz o valor da distância zenital verdadeira e, a depressão do horizonte, um efeito devido à curvatura da terra que traduz a diferença de desníveis entre o plano horizontal da estação A e a superfície de nível (curva) de A.

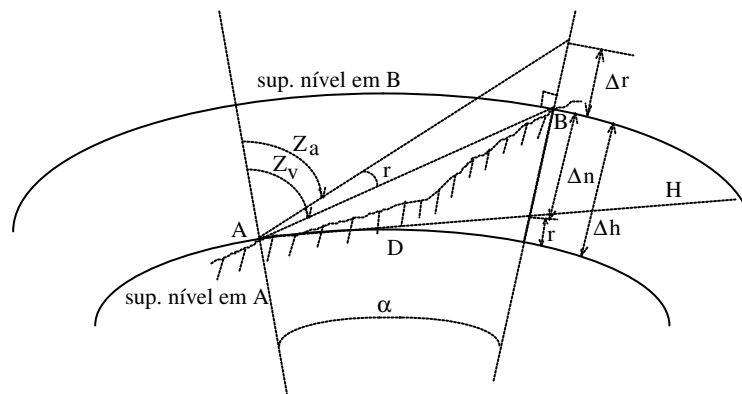


Fig. 5.2 - Efeitos da refração e da depressão do horizonte.

Erro devido à refração atmosférica

A refração atmosférica tem uma influência directa sobre a medição de ângulos, nomeadamente a chamada refração vertical (componente vertical da refração) sobre as distâncias zenitais, que não é mais o desvio para o zénite da direcção de uma visada sobre o plano vertical que contém a visada; ou seja, os raios visuais de um objecto são desviados de tal forma que o objecto aparenta estar num nível mais elevado.

Este fenómeno deve-se a um princípio descrito pelas leis de Snell ou de Descartes, as quais dizem que, um raio óptico quando passa de um meio de maior densidade (meio refringente) para um meio de menor densidade (meio refractário), é desviado aproximando-se da normal às duas superfícies; diz ainda, que a razão dos ângulos de incidência e de refração, através dos seus senos, é inversamente proporcional à razão dos respectivos índices de refração dos meios.

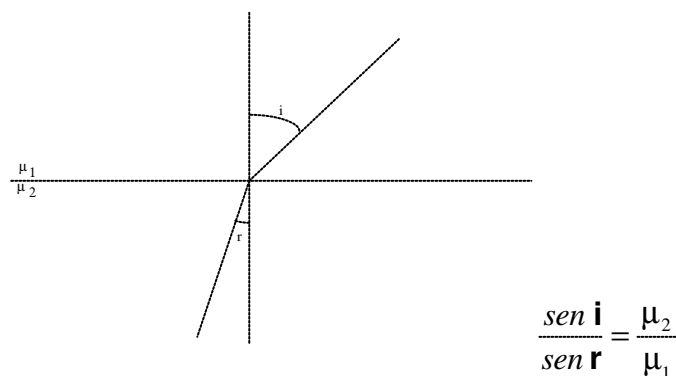


Fig. 5.3 - Refracção de um raio óptico.

Considerando que a atmosfera é constituída por camadas paralelas e concêntricas, com diferentes valores de densidade (equivalente a diferentes índices de refração) na razão inversa da variação de altitudes então, em condições normais verifica-se, segundo os princípios ópticos, que

os raios visuais têm uma trajectória curvilínea no plano vertical, com concavidade voltada para baixo.

A chamada de atenção para a questão da necessidade de condições normais deve ser feita, pois já se encontraram pequenas zonas do globo em que, a depressão das camadas atmosféricas verifica uma curvatura negativa (com a concavidade voltada para cima).

Assim, e pela Fig. 5.2, temos que:

$$Z_v = Z_a + r$$

sendo $r = k \alpha$, onde $k=0,07$ ($k=k(P,T,H)$) é o índice de refacção para condições normais de pressão (P), temperatura (T) e humidade (H).

Considerando-se Δr a correcção a aplicar directamente sobre o desnível aparente observado, então

$$\Delta r = D * r \Leftrightarrow \Delta r = 0,07 \frac{D^2}{R} \quad (5.1.2)$$

e

$$\Delta h = \Delta h' - \Delta r .$$

Correcção ao desnível devido à depressão do horizonte

Visto os desníveis verdadeiros entre pontos terrestres corresponderem à diferença de altitudes entre as respectivas superfícies de nível (superfícies curvas), e não entre os planos horizontais (tangentes às superfícies de nível) associados ao ponto estação, valores que derivam directamente das fórmulas apresentadas, haverá que considerar um valor correctivo devido a esse efeito da curvatura da terra.

Essa correcção aplicada directamente sobre o desnível aparente é dada por

$$\Omega = \frac{D^2}{2R} \quad (5.1.3)$$

Como o plano horizontal é tangente à superfície de nível no ponto estação, esta correcção é aditiva ao desnível aparente, ou seja

$$\Delta h = \Delta h' + \Omega$$

Se associarmos as duas correcções conjuntamente sobre o desnível aparente, temos

$$\begin{aligned} \epsilon &= \Omega - \Delta r = \frac{D^2}{2R} - 0,07 \frac{D^2}{R} \\ \epsilon &= \frac{D^2}{R} \left(\frac{1}{2} - K \right) = 0,43 \frac{D^2}{R} \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

considerando $R=6731$ Km, vem finalmente

$$\Delta H_v = \Delta H_a + 6,8 * 10^{-8} D^2 \quad (5.1.5)$$

o desnível directamente corrigida dos dois efeitos.

É de notar que estes dois efeitos poder-se-ão desprezar para distâncias pequenas. Por exemplo, para uma distância de 200m a correcção conjunta é de 3mm. No entanto, se se tratar de um nivelamento sucessivo, este efeito é acumulativo e nesse caso, já não será desprezível.

Nivelamento trigonométrico com zenitais recíprocas e simultâneas

É evidente que quando se enreda pela repetitividade das observações, os resultados obtidos são estatisticamente melhores. No caso do nivelamento trigonométrico há ainda outra razão, mais importante que a questão estatística, e que justifica a observação de distâncias zenitais recíprocas e simultâneas para a melhoria da precisão dos resultados do nivelamento; essa razão é o facto de com este tipo de observações estar-se a eliminar os efeitos da refração e da depressão do horizonte. Esta questão é de extrema importância pois, as correcções em causa são estimativas, nomeadamente o efeito da refração que resulta de um modelo, e por isso encontram-se evitadas de erros.

Deste modo, o nivelamento trigonométrico resulta com muito maior precisão se forem feitas observações zenitais recíprocas e simultâneas.

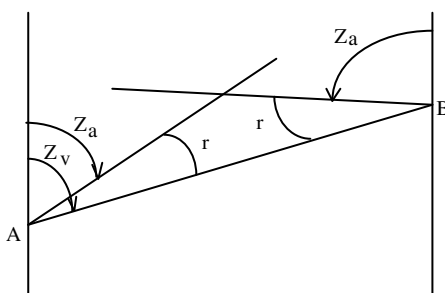


Fig. 5.4 - Relação entre as zenitais aparentes e verdadeiras

$$Z_{AB} = \frac{Z_{aA} + (180^\circ - Z_{aB})}{2} = \frac{Z_{vA} - r + (180^\circ - (Z_{vB} - r))}{2} = \frac{Z_{vA} + (180^\circ - Z_{vB})}{2}$$

Para o caso específico da refração, partindo do pressuposto de que os valores de P, T e H nos dois pontos são os mesmos, então o valor de r , ângulo de refração, será o mesmo para os dois pontos. Donde, a média das distâncias zenitais aparentes, reduzidas ao mesmo quadrante, é igual à média das zenitais verdadeiras e recíprocas, isto é, os ângulos de refração nos dois pontos cancelam-se.

Daqui se deduz, que o efeito da refração é atenuado sobre o valor do desnível com distâncias recíprocas é completamente anulado (dentro do rigor exigido) quando as zenitais recíprocas forem observadas em simultâneo.

Mesmo em zonas de microclimas particulares, onde as camadas atmosféricas têm uma variação de densidade inversa ao normal, o nivelamento trigonométrico com zenitais recíprocas e simultâneas revela-se vantajoso. Salvo em devidas excepções, onde a curvatura das camadas atmosféricas poderá ser variável.

Em relação à correcção devido ao efeito de esfericidade da terra, facilmente se verifica que toma valores iguais nos dois sentidos do nivelamento e portanto, cancelará o seu valor na média dos dois desníveis.

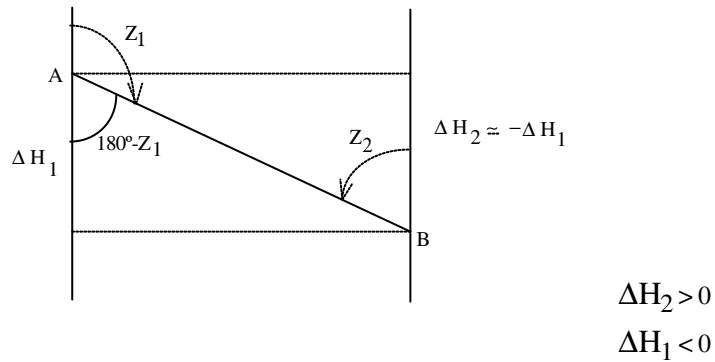


Fig. 5.5 - Desnível com zenitais recíprocas e simultâneas.

Vamos assumir um transporte de cota de um ponto A para um ponto B. Tem-se, com a observação directa dos desníveis ΔH_1 e ΔH_2 , a cota de B dada por:

$$H_B = H_A + \Delta H_1$$

$$H_B = H_A - \Delta H_2$$

somando e dividindo por dois,

$$H_B = H_A + \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{2}$$

onde,

$$\Delta H_1 = -D_1 \cos(180^\circ - Z_1) + h_I^1 - h_A^2 + \epsilon_1$$

$$\Delta H_1 = D_1 \cos Z_1 + h_I^1 - h_A^2 + \epsilon_1$$

$$-\Delta H_2 = -(D_2 \cos Z_2 + h_I^2 - h_A^1 + \epsilon_2)$$

e fazendo as respectivas substituições, temos

$$H_B = H_A + \frac{D_1 \cos Z_1 - D_2 \cos Z_2 + (h_I^1 - h_I^2) - (h_A^2 - h_A^1) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2} \quad (5.1.6)$$

Considerando agora que:

1) as correcções conjuntas dos efeitos que afectam o desnível são iguais para os dois pontos, então $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$;

2) as alturas h_I (do instrumento) e h_A (do alvo) divididas em alturas do tripé mais a base do aparelho e altura do teodolito ou do alvo,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad h_I^1 &= h_{TB}^1 + h_I \\ h_I^2 &= h_{TB}^2 + h_I \Rightarrow h_I^1 - h_I^2 = h_{TB}^1 - h_{TB}^2 \\ \text{b)} \quad h_A^1 &= h_{TB}^1 + h_A \\ h_A^2 &= h_{TB}^2 + h_A \Rightarrow h_A^2 - h_A^1 = h_{TB}^2 - h_{TB}^1 \end{aligned}$$

obtém-se

$$H_B = H_A + \frac{D_1 \cos Z_1 - D_2 \cos Z_2 + (h_{TB}^1 - h_{TB}^2) - (h_{TB}^2 - h_{TB}^1)}{2}.$$

Esta simplificação impõe que haja apenas troca do instrumento pelo alvo, mantendo-se as bases fixadas aos tripés. Se na troca do instrumento pelo alvo, na transição da observação directa para a recíproca, apenas se deslocarem estes dois elementos sem as respectivas bases, ficando estas fixas, centradas e niveladas no tripé, então no caso de não haver alteração das alturas do tripé, nem significativa alteração da posição dos parafusos nivelantes, a altura do tripé mais base mantém-se após esta operação e

$$H_B = H_A + \frac{D_1 \cos Z_1 - D_2 \cos Z_2 + 2h_{TB}^1 - 2h_{TB}^2}{2}$$

Para precisões topográficas, podemos ainda considerar,

$$D_1 = D_2 = \bar{D} = \frac{D_1 + D_2}{2}$$

resultando a expressão final para o nivelamento trigonométrico com zenitais recíprocas e simultâneas:

$$H_B = H_A - \frac{\bar{D}(\cos Z_2 - \cos Z_1)}{2} + (h_{TB}^1 - h_{TB}^2) \quad (5.1.7a)$$

utilizando a distância reduzida ao plano horizontal, também se pode escrever

$$H_B = H_A - \frac{\overline{D}_H (\cot gZ_2 - \cot gZ_1)}{2} + (h_{TB}^1 - h_{TB}^2) \quad (5.1.7b)$$

Propagação de erros no nivelamento trigonométrico

Com zenitais simples o transporte de cotas é dado por

$$H_B = H_A + D \cos Z + h_I - h_A + \varepsilon \quad (5.1.8)$$

diferenciando esta expressão em ordem a todos os parâmetros, com excepção de ε , e em seguida, aplicando a lei geral de propagação dos erros para funções lineares, a precisão de H_B será dada por

$$\sigma_{HB} = \sqrt{\sigma_{HA}^2 + \cos^2 Z \sigma_D^2 + (D \sin Z)^2 \sigma_Z^2 + 2\sigma_h^2 + \sigma_\varepsilon^2} \quad (5.1.9)$$

considerando que a precisão de h_I é igual à de h_A

Para o caso do nivelamento com zenitais recíprocas, a precisão é dada por

$$\sigma_{HB} = \sqrt{\sigma_{HA}^2 + \left(\frac{\cos Z_2 - \cos Z_1}{2} \right)^2 \sigma_D^2 + \left[D \frac{(\sin Z_2 - \sin Z_1)}{2} \right]^2 \sigma_Z^2} \quad (5.1.10)$$

5.2 Nivelamento geométrico

O nivelamento geométrico é um tipo de medição directa, cuja precisão depende apenas do rigor do aparelho e da graduação da escala das miras e obviamente, distância entre os pontos.

O desnível entre dois pontos é determinado à custa de uma superfície de nível de referência, definida pelo plano horizontal que contém o centro E' do Nível, colocado num ponto intermédio dos pontos de cota, nos quais são colocadas as miras.

Devido ao efeito da refacção, os pontos de intersecção das linhas de visada com as miras, não coincidem com os pontos de intersecção entre o plano horizontal de E' e as miras; tal facto provocaria um pequeno erro nos desníveis, que dependeria da distância do nível à mira. Para eliminar tal erro, deve-se colocar o nível exactamente num ponto equidistante dos dois pontos de cota A e B (os pontos equidistantes encontram-se na mediatriz do segmento AB). Procedendo-se

deste modo, até o eventual erro devido à depressão do horizonte fica eliminado, pois ele será de igual valor para ambos os lados.

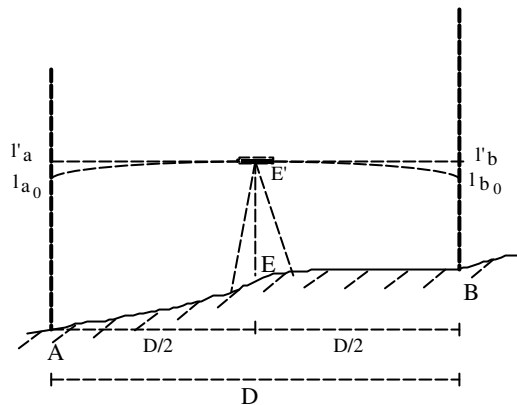


Fig. 5.6 - Troço de nivelamento geométrico.

Seja então,

(l'_a, l'_b) - alturas intersectadas nas miras pelo plano horizontal de E' ;

(l_{a0}, l_{b0}) - alturas intersectadas nas miras pelas visadas (raio óptico visual

definido pela linha de pontaria) eivadas do efeito de refracção;

então, sendo

$$H_A = H_{E'} - l'_a$$

$$H_B = H_{E'} - l'_b$$

resulta o desnível de A para B dado por

$$\Delta H_{AB} = l'_a - l'_b$$

Como

$$l'_a = l_{a0} + e_a$$

$$l'_b = l_{b0} + e_b$$

e sendo $D_{EB} = D_{EA}$, ou seja colocando-se o nível num ponto equidistante, tem-se $e_a = e_b$ e

$$\Delta H_{AB} = l_{a0} - l_{b0} \quad (5.2.1)$$

A condição de visadas de igual comprimento, para que o erro devido ao efeito da refracção seja eliminado, é de rigor relativo. Assim, para o nivelamento de alta precisão as distâncias devem ser iguais a menos de um erro de 1%, para o nivelamento de média precisão devem ser iguais a menos de um erro de 10%, respectivamente, 0.2m e 2m para visadas de 20m de comprimento.

A validade sobre a eliminação do efeito de refracção nessas condições, apenas se verifica nos casos de troços aproximadamente planos, ou seja, sem grandes desníveis. É nesta situação que se verifica que as camadas atmosféricas são esféricas e concêntricas, logo os desvios das visadas reais devido à refracção são iguais. Nos casos onde existem, relativamente, grandes desníveis,

além de não se verificar aquela situação, uma das visadas intersectará a mira respectiva, junto do solo, o que aumentará também, o efeito final da refacção sobre o desnível.

Quanto aos níveis, eles distinguem-se pela sua precisão, de primeira ordem (ex.: Wild N3), de segunda ordem (ex.: Wild NA2) ou de terceira ordem. A diferença está na sensibilidade na respectiva nivela para colocar a linha de visada sobre o plano horizontal com o rigor necessário, e ainda, no facto de o N3 ter incorporado um sistema de lâminas de faces paralelas para refinamento da leitura, tornando-a mais precisa.

Do mesmo modo se pode fazer uma divisão quanto ao tipo de miras que se podem utilizar. Assim temos miras com escalas de divisão centimétrica e de divisão sub-centimétrica (2mm). Quanto ao tipo de material elas podem ser de invar, caso das miras mais precisas, pois o invar é o material com o coeficiente de dilatação mais baixo, de alumínio, de madeira ou de matérias sintéticos.

Actualmente já existem miras de leitura electro-ópticas, munidos de traços na forma de código de barras, para níveis electrónicos que procedem à leitura e registo de dados automaticamente.

Relativamente aos níveis, e em termos de erros de observação, salienta-se o erro de colimação (linha de pontaria não paralela ao plano horizontal ou de colimação) derivado a uma desrectificação da nivela ou do sistema de compensação, e que contribui para o erro final do desnível. Quanto às miras, podem também contribuir para o erro final do desnível devido à sua má graduação, ou desrectificação da graduação.

Transporte de cota

O transporte de cota realiza-se quase sempre através de linhas de nivelamento apoiadas em pontos de cota previamente conhecida. As linhas de nivelamento podem ser fechadas (abrem e fecham no mesmo ponto) ou abertas (abrem e fecham em pontos distintos). As linhas de nivelamento, como é óbvio, têm passagem obrigatória pelos pontos a cotar; estes pontos devem estar bem materializados e com superfícies bem definidas, para que sobre elas possam assentar as miras sem qualquer ambiguidade. Todos os restantes pontos intermédios que completam a poligonal são meros pontos auxiliares e de passagem, nos quais as miras devem assentar sobre sapatas, para que da mesma forma o estacionamento da mira, em termos altimétricos, seja único.

Os pontos de nivelamento são normalmente materializados pelas chamadas “moedas”, cilindros de cobre encastrados no solo, ou com *pistons* metálicos de extremidade arredondada. Estes pontos, quando são importantes e se encontram em locais de grande actividade, devem ser colocados a um nível ligeiramente inferior ao do solo e protegidos por uma pequena caixa circular com tampa, de preferência metálica.

O recurso a linhas de nivelamento apoiadas ou amarradas, linhas de nivelamento com pontos de cota nos extremos, justifica-se para a confirmação dos valores de cota transportados e para,

melhoria da precisão. Nestes casos, é feito um ajustamento através da distribuição do chamado erro de fecho, resultante dos erros de observação, pelos vários desníveis correspondentes aos lanços da poligonal.

O tratamento das observações de nivelamento passa por um ajustamento dos desníveis observados aos valores de cota dos pontos de apoio. Como a precisão é inversamente proporcional à distância, o ajustamento deve ser feito na razão inversa das distâncias dos troços.

Considere-se então,

H_i, h_i - cotas iniciais e finais verdadeiras,

H'_f - cota final transportada (eivada de erros de observação).

em que

$$H'_f = H_i + \sum_j \Delta H'_j \quad (5.2.2)$$

devido aos erros de observação, resulta um erro de fecho altimétrico de

$$\begin{aligned} \epsilon_H &= H_f^i - H'_f \\ \epsilon_H &= H_i + \sum_j \Delta H_j^i - H'_f \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Para o caso particular de uma poligonal fechada, em que $H_f = H_i$, o erro de fecho é igual à soma dos desníveis

$$\epsilon_H = \sum_j \Delta H_j^i$$

É normal ouvir falar-se em nivelamento e contra-nivelamento, não são mais do que nivelamentos feitos no sentido directo e no sentido inverso. No caso de uma poligonal fechada, o nivelamento será a primeira metade do percurso, até ao ponto mais afastado e o contra-nivelamento, a outra metade do percurso, feita em sentido contrário. Para linhas de nivelamento abertas, será o nivelamento de um ponto A para um ponto B e o contra-nivelamento, do ponto B para o ponto A. Em termos de cálculo de erro de fecho, ele será igual à diferença entre os valores absolutos das somas dos desníveis para os dois percursos.

Os percursos de nivelamento no sentido directo e inverso devem ser diferentes e, os únicos pontos comuns serão os pontos a cotar.

Precisão dos desníveis

Supondo o nível estacionado e perfeitamente nivelado num ponto intermédio e, considerar apenas erros de pontaria (e_p), para o caso de níveis com micrómetro ou erros de estimação da leitura para o caso contrário, e erros de calagem (e_c), então podemos analisar a precisão dos desníveis observados.

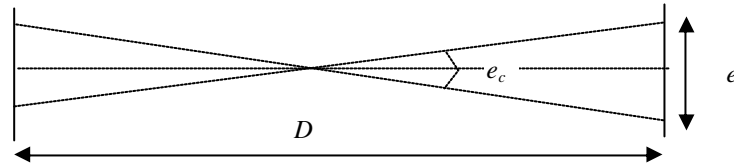


Fig. 5.7 - Erros que afectam o nivelamento geométrico

Para o caso do erro de calagem, a sua influência directa sobre o desnível é, de acordo com a figura

$$e = e_c \frac{D}{2}$$

para e_c pequeno e em radianos. Analogamente para o caso do erro de leitura,

$$e = e_l \frac{D}{2}$$

Compondo os dois efeitos, em termos de variâncias, e supondo que são independentes, tem-se

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \frac{(\sigma_l^2 + \sigma_c^2)}{2} D^2 \Leftrightarrow \sigma_{\Delta H}^2 = K D^2 \quad (5.2.4)$$

em que, $K = (\sigma_l^2 + \sigma_c^2)/2$ é uma constante que podemos, em princípio, considerar exclusivamente dependente do aparelho.

Tolerância do erro de fecho

Sendo o erro de fecho, para o caso de linhas de nivelamento fechadas, dado por:

$$\epsilon_H = \sum_j \Delta H_j^i$$

então, por aplicação da lei geral de propagação das variâncias e covariâncias, vem como variância do erro de fecho

$$\sigma_{\epsilon_H}^2 = \sum_j \sigma_{\Delta H_j}^2$$

que ao considerarmos, $\sigma_{\Delta H}^2 = K D^2$, vem

$$\sigma_{\epsilon_H}^2 = K \sum_j D^2 \quad (5.2.5)$$

Considerando como tolerância (erro máximo tolerável para o erro de fecho), a semi-amplitude de um intervalo de confiança a 99%, então a tolerância para o valor do erro de fecho será dada por

$$\varepsilon_T = 2.6\sigma_{\varepsilon_H}$$

donde o erro de fecho deverá verificar a seguinte condição de tolerância

$$\varepsilon_H \leq 2.6\sqrt{K} \sqrt{\sum_j D_j^2}$$

Se fixarmos a confiança no valor de 99.9%, então

$$\varepsilon_H \leq 3\sqrt{K} \sqrt{\sum_j D_j^2}. \quad (5.2.7)$$

O valor de K estará dependente da precisão do aparelho utilizado, para os aparelhos disponíveis na F.C.U.L., o nível N3 e NA2, podemos utilizar os seguintes valores de tolerância:

- alta precisão (N3) $\sqrt{K} = 0''/206265$
- média-alta precisão (NA2 c/ micrómetro) $\sqrt{K} = 2''/206265$
- média precisão (NA2 s/ micrómetro) $\sqrt{K} = 4''/206265$

Existe um outro critério de origem empírica, que é a norma utilizada, com valores próximos mas mais toleráveis nas grandes linhas de nivelamento, em que:

- alta precisão $\varepsilon_T(\text{mm}) = 4\sqrt{L(\text{Km})}$
- média precisão $\varepsilon_T(\text{mm}) = 8.3\sqrt{L(\text{Km})}$

onde $L = \sum D_j$ é o desenvolvimento total da poligonal.

Para o caso de linhas de nivelamento abertas, dois pontos de apoio distintos, dever-se-á considerar o erro relativo dos valores de cota dos pontos de apoio, isto é,

$$\sigma_{\varepsilon_H}^2 = \sigma_{H_i}^2 + K \sum_j D_j + \sigma_{H_f}^2$$

e

$$|\varepsilon_H| = 2.6 \sqrt{\sigma_{H_i}^2 + K \sum_j D_j + \sigma_{H_f}^2} \quad (5.2.7)$$

Compensação do nivelamento

Os valores de cota final a atribuir aos pontos novos, resulta de uma compensação, onde o erro de fecho é distribuído proporcionalmente, pelos desníveis observados. Ou seja, o erro de fecho é

distribuído na proporção inversa dos pesos dos desníveis ($1/P_i = \sigma_{\Delta H_i}^2$) e de sinal contrário, por todos os desníveis observados $\Delta H_j'$:

$$\Delta H_j = \Delta H_j' - \frac{\sigma_j^2}{\sum_k \sigma_k^2} \epsilon_H \Leftrightarrow \Delta H_j = \Delta H_j' + \epsilon_j \quad (5.2.8)$$

Os desníveis consideram-se compensados quando $\epsilon_H = \sum \Delta H_j$ é igual a zero (caso de linhas de nivelamento fechadas).

Determine-se então, especificamente a expressão de ϵ_j , o termo correctivo dos desníveis observados.

Considere-se a identidade

$$\epsilon_H = \frac{\sum 1/p_j}{\sum 1/p_j} \epsilon_H$$

onde p_j é o peso de compensação para cada lanço, então

$$\epsilon_H = \frac{\sum \left(\frac{1}{p_j} \epsilon_H \right)}{\sum 1/p_j} \Leftrightarrow \epsilon_H = \frac{1/p_1}{\sum 1/p_j} \epsilon_H + \frac{1/p_2}{\sum 1/p_j} \epsilon_H + \dots + \frac{1/p_n}{\sum 1/p_j} \epsilon_H$$

como,

$$\epsilon_H = -\sum_j \epsilon_j \Leftrightarrow \epsilon_H = -\epsilon_1 - \epsilon_2 - \dots - \epsilon_n$$

para que resulte após a compensação $\epsilon_H = 0$, vem por analogia das duas expressões anteriores,

$$\epsilon_j = \frac{1/p_j}{\sum_k 1/p_k} (-\epsilon_H) \quad (5.2.9)$$

Por outro lado, $p_j = 1/\sigma_{\Delta H_j}^2$ com $\sigma_{\Delta H_j}^2 = KD^2$, como K é uma constante do aparelho, usando-se sempre o mesmo aparelho em toda a poligonal, vem finalmente a expressão da compensação para o desnível observado de cada lanço

$$\epsilon_j = -\frac{D_j^2}{\sum_k D_k^2} \epsilon_H \quad (5.2.10)$$

Para o lanço j , o valor de desnível compensado é dado então por

$$\Delta H_j = \Delta H'_j - \frac{D_j^2}{\sum_{k=1}^n D_k^2} \epsilon_H \quad (5.2.11)$$

e para o respectivo ponto j , o valor de cota compensada é dado por

$$H_j = H_0 + \sum_{k=1}^j \Delta H_k - \frac{\sum_{k=1}^j D_k^2}{\sum_{k=1}^n D_k^2} \epsilon_H \quad (5.2.12)$$

Esta compensação de nivelamento com observações pesadas, corresponde ao ajustamento pelo método dos mínimos quadrados com um equação de condição, a do erro de fecho.

A compensação poderá ser feita, sem grandes requisitos, através de uma folha de cálculo como é apresentado pela tabela seguinte.

Desnível Obser.	Distância	D^2	Factor Peso	Correcção ϵ_j (5.1.10)	Desnív. compen.
$\Delta H'_1$	D_1	D_1^2	$D_1^2 / \sum D_i^2$	ϵ_1	$\Delta H_1 = \Delta H'_1 + \epsilon_1$
...	...	...	...	...	...
$\Delta H'_n$	D_n	D_n^2	$D_n^2 / \sum D_n^2$	ϵ_n	$\Delta H_n = \Delta H'_n + \epsilon_n$
$\epsilon_H = \sum \Delta H_i$	D_T	$\sum D_i^2$		$-\epsilon_H = \sum \Delta \epsilon_i$	$H_i + \sum \Delta H_i - H_i = 0$

O cálculo das cotas compensadas é feito através da adição sucessiva dos desníveis compensados à cota do ponto inicial de apoio altimétrico.

Em termos clássicos, a compensação era feita com distribuição equitativa do erro de fecho pelos desníveis da poligonal. Esse método apresenta soluções semelhantes ao método aqui exposto, para o caso de linhas de nivelamento com lados de comprimentos iguais, o que é facilmente verificado pela expressão (5.2.10) para $D_j = D_k$.

6. POLIGONAÇÃO

As poligonais são figuras geométricas de apoio à coordenação e ao levantamento topográfico, são fáceis de materializar e de fácil observação. São, no entanto, figuras frágeis ou pouco consistentes com vista a uma boa precisão de coordenação, especialmente quando são de grande extensão. Isso deve-se ao seu fraco apoio e ao fraco constrangimento geométrico, apenas dois pontos fixos nas extremidades.

As poligonais são formadas por um número finito de lados (ou vértices), interligando dois ou mais pontos previamente coordenados, chamados pontos de apoio, nos quais é também conhecido uma orientação, normalmente rumos.

6.1 Configuração geométrica

É frequente atribuir a designação de poligonal fechada a todas as poligonais apoiadas, pois os valores transportados de coordenadas e rumos são obrigados a fechar no ponto final com valores iguais às coordenadas e rumo do ponto de chegada. É claro que esta obrigatoriedade é resultado do constrangimento da poligonal (pontos de apoio fixados), o que, por sua vez, resulta numa confirmação dos resultados ou na sua maior fiabilidade e conduz à condição de compensação ou ajustamento da poligonal. Esta designação de poligonal fechada não tem a ver com a configuração geométrica, mas com a configuração matemática da poligonal. Nesta designação, as poligonais fechadas podem ser *fechadas em anel* ou *amarradas*, elas serão abertas quando não apoiadas, ou seja, poligonais livres (apenas um ponto e um rumo fixos).

Aqui iremos adoptar a classificação do ponto de vista geométrico. Assim, as poligonais simples apoiadas têm a seguinte divisão:

$$\text{poligonais apoiadas : } \left\{ \begin{array}{l} - \text{ abertas} \\ - \text{ fechadas: } \left\{ \begin{array}{l} - \text{ com orientação interna} \\ - \text{ com orientação externa} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

As poligonais abertas apoiam-se em dois pontos coordenados diferentes, enquanto que as poligonais fechadas apoiam-se num único ponto (ponto inicial e final coincidem), podendo a orientação ser dada a partir da direcção do ponto anterior (último ponto) - orientação interna, ou ser dada a partir de um ponto exterior à poligonal - orientação externa. A diferença entre os dois tipos de poligonais fechadas aqui apresentados reside no facto de no primeiro caso haver um transporte prévio do rumo de orientação e, no segundo caso, esse transporte estar implicitamente incluído no processo de observação e cálculo da poligonal.

Existem além das poligonais simples (uma única poligonal) as chamadas poligonais múltiplas, figuras formadas por várias poligonais que se encontram em um ou vários pontos nodais. O método de observação é basicamente o mesmo, variará apenas no método de tratamento matemático.

Em termos clássicos e do ponto de vista matemático, era costume tratar as duas componentes, a altimetria e a planimetria, em separado. Hoje em dia, quer pelo uso generalizado dos computadores como ferramenta fundamental de cálculo, quer pela introdução dos equipamentos de observação mais modernos, as estações totais electro-ópticas com registo e transferência de dados automáticos, tal prática já não constitui um hábito. Além disso, os computadores permitiram a recuperação de métodos de cálculo antigos que antes não serviam pela sua elevada carga de cálculo numérico, é exemplo disso, a técnica de ajustamento mais conhecida, o método dos mínimos quadrados.

Por tudo isso, a abordagem em termos de processamento matemático aqui considerada, será a do tratamento conjunto das duas operações – a planimetria e altimetria, apresentando um modelo tridimensional completo.

Poligonais abertas

Consideremos uma poligonal com n pontos estacionados, apoiada nos seus extremos com orientação para pontos exteriores à poligonal, de acordo com o apresentado na figura,

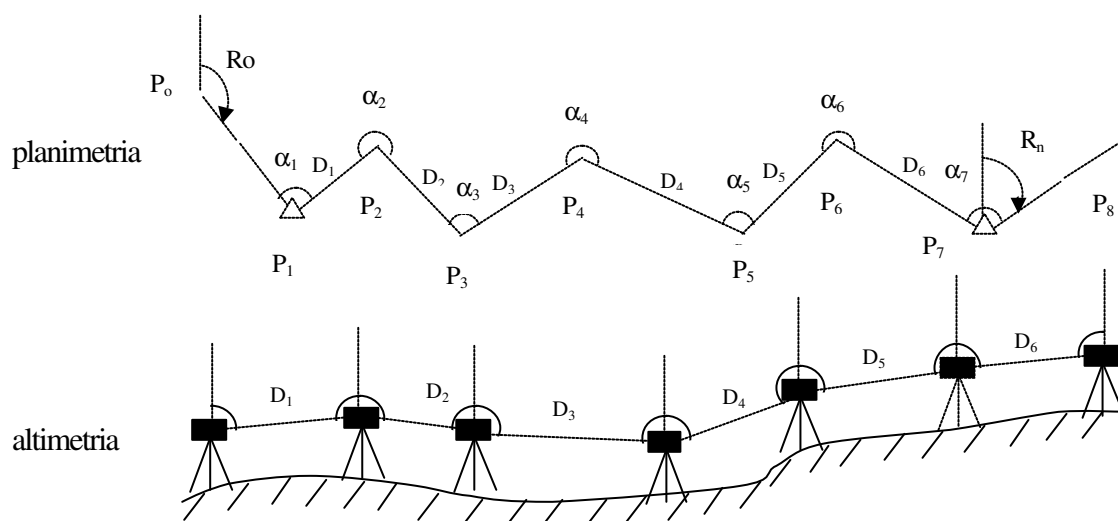


Fig. 6.1 - Poligonal aberta.

As observações que nela se efectuam são:

- n ângulos horizontais
- $n-1$ distâncias inclinadas

- $n-1$ desníveis (c/ distâncias zenitais recíprocas)

numa totalidade de $N=3n-2$ observações.

Em n pontos estacionados, onde dois são fixos ou de coordenadas conhecidas, temos $n-2$ pontos novos (livres) a coordenar, donde o número de incógnitas do sistema é de

$$N_0 = 3(n-2) = 3n-6$$

Podemos então, calcular a redundância do sistema, ou o número de graus de liberdade, por

$$r = N - N_0 = 3n-2 - (3n-6) = 4$$

Como a redundância é diferente de zero, as observações devem ser ajustadas. O valor da redundância dá-nos exactamente o número de equações de condição só com observações, as quais formam o sistema a ser ajustado. Essas equações de condição são as relações que se estabelece entre os erros de fecho da poligonal - diferenças entre os valores transportados e os valores dados para o ponto de chegada e, as observações efectuadas ao longo da poligonal.

Transporte de coordenadas aproximadas

Antes de qualquer operação de ajustamento deve-se calcular as coordenadas aproximadas dos pontos da poligonal para que se possam formar as equações. Neste caso as coordenadas aproximadas dos pontos novos servem especificamente para o cálculo dos erros de fecho da poligonal, isto é, para se definirem as equações de condição.

Transporte de rumos

$$R_n = R_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \Pi) \quad (6.1)$$

Transporte das coordenadas planimétricas

$$\begin{aligned} M_n &= M_1 + \sum_{i=1}^{n-1} D_i \sin R_i \\ P_n &= P_1 + \sum_{i=1}^{n-1} D_i \cos R_i \end{aligned} \quad (6.2)$$

Transporte de cotas com zenitais recíprocas mantendo os tripés estacionados e trocando-se apenas a estação total com o alvo

$$H_n = H_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(D_i \frac{(\cos Z_{i,i+1} - \cos Z_{i+1,i})}{2} + (h_{TB}^1 - h_{TB}^2) \right) \quad (6.3)$$

As distâncias deverão ser sujeitas às respectivas correcções e reduções. Para os desníveis, e caso sejam medidas com distanciómetros electrónicos, devem ser corrigidas apenas da correcção

atmosférica; para as coordenadas planimétricas as distâncias deverão ser reduzidas ao respectivo plano cartográfico.

Erros de fecho

Os erros de fecho são as condições que permitem o ajustamento das observações. Resultam da existência de erros de observação e, neste caso específico de poligonal aberta, dependem também da boa ou má conformidade local das redes de apoio, ou seja do erro relativo entre as coordenadas dos pontos de apoio.

Considerando o modelo tridimensional completo, resultam quatro erros de fecho, o fecho angular, que relaciona os rumos, os fechos planimétricos, que relacionam as coordenadas planimétricas e o fecho altimétrico, que relaciona os valores de cota.

O erro de fecho angular é a diferença entre o rumo transportado ao longo da poligonal e o rumo de apoio no ponto de chegada, determinado por

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha} &= R'_n - R_n = R_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \Pi) - R_n \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\alpha} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i - (R_n + n\Pi - R_0)\end{aligned}\quad (6.4)$$

O erros de fecho planimétrico são a diferença entre as coordenadas transportadas e as coordenadas do ponto de apoio de chegada, determinados por

$$\begin{aligned}\varepsilon_M &= M'_n - M_n = M_1 + \sum_{i=1}^{n-1} D_i \sin R_i - M_n \\ \varepsilon_P &= P'_n - P_n = P_1 + \sum_{i=1}^{n-1} D_i \cos R_i - P_n\end{aligned}\quad (6.5)$$

O erro fecho linear é a combinação dos dois erros de fecho planimétricos, dado por

$$\varepsilon_l = \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_P^2} \quad (6.6)$$

O erro de fecho altimétrico é a diferença entre o valor de cota transportado ao longo da poligonal e o valor de cota do ponto de apoio de chegada, dado por

$$\begin{aligned}\varepsilon_H &= H'_n - H_n = \\ &= H_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ D_{hi} \frac{(\cos Z_{i,i+1} - \cos Z_{i+1,i})}{2} + h_i - h_{i+1} \right\} - H_n\end{aligned}\quad (6.7)$$

Poligonal fechada com orientação interna

Consideremos uma poligonal com n pontos observados que comece e acabe no mesmo ponto e, cujo rumo de orientação seja o rumo dado pela direcção de visada atrás do ponto de apoio, como se apresenta na figura seguinte

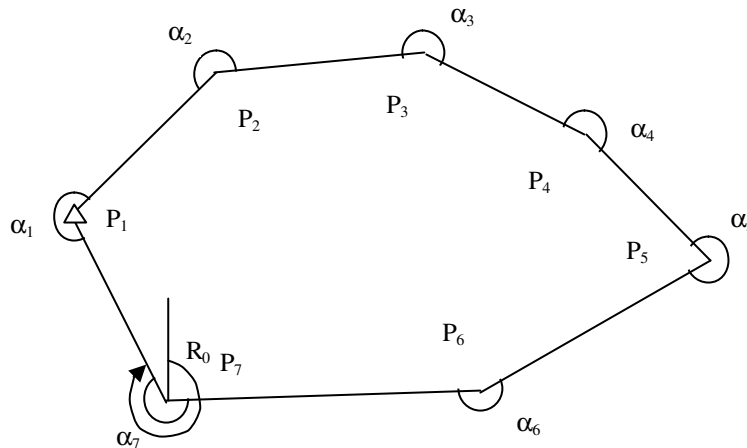


Fig.6.2 - Poligonal fechada com orientação interna

As observações que se efectuam nesta poligonal, são:

- n ângulos horizontais
- n distâncias inclinadas
- n desníveis ($c/$ zenitais recíprocas)
- 1 rumo de orientação

numa totalidade de $N = 3n + 1$ observações.

Em n pontos estacionados, onde apenas um é fixo ou de coordenadas conhecidas, temos $n - 1$ pontos novos (livres) a coordenar, donde o número de incógnitas do sistema é

$$N_0 = 3(n - 1) = 3n - 3$$

A redundância do sistema é novamente

$$r = N - N_0 = 3n + 1 - (3n - 3) = 4$$

resultando também, 4 equações de condição, as condições de fecho da poligonal.

Neste caso particular, verificam-se as condições de igualdade entre os valores de partida e chegada da poligonal, pelo facto de ser fechada, ou seja

$$R_0 = R_n; M_1 = M_n; P_1 = P_n; H_1 = H_n$$

Estas condições fazem com que os erros de fecho dependam apenas das observações. Temos então

$$\varepsilon_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i - n\Pi - 2\Pi$$

$$\varepsilon_M = \sum_{i=1}^n \Delta M_i$$

$$\varepsilon_P = \sum_{i=1}^n \Delta P_i$$

$$\varepsilon_H = \sum_{i=1}^n \Delta H_i$$

onde para ε_{α} é necessário retirar um ciclo de 2Π , pois deve-se considerar $R_n - R'_n = 2\Pi$, em vez de igual a 0 (zero).

Poligonal fechada com orientação externa

Para uma poligonal de **n-1** pontos, consideram-se **n** estacionados, ou seja, o primeiro ponto (de partida e de chegada) é estacionado no início e no fim da observação da poligonal. A orientação é dada por uma direcção externa à poligonal, verificando-se de igual modo, a igualdade dos rumos inicial e final de orientação da poligonal.

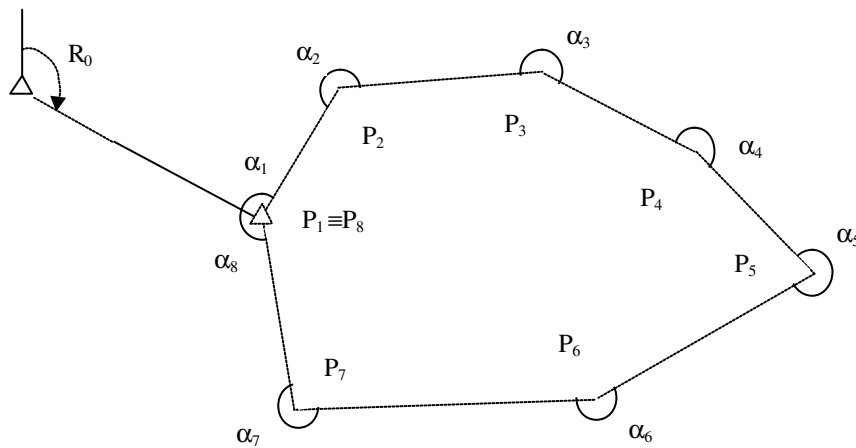


Fig.6.3 -Poligonal aberta com orientação externa.

Estamos na presença de uma poligonal do tipo aberto, em termos de dimensionamento da configuração do sistema de observações, mas é do tipo fechado em termos de geometria. Isto é, em termos matemáticos, ou em termos de ajustamento computacional, pode ser considerada uma poligonal aberta, com a particularidade de abrir e fechar no mesmo ponto, em termos observacionais ela é do tipo fechado. Basta para isso considerar o número de pontos $n=n+1$, onde P_n tem os mesmos valores de P_1 (por ser o mesmo), e o rumo de chegada $R_n=R_0+\Pi$.

Considerando então n pontos estacionados, apresentam-se $n-2$ pontos novos e, em termos de observações temos:

- n ângulos horizontais
- $n-1$ distâncias inclinadas
- $n-1$ desníveis

perfazendo uma totalidade de $N = 3n-2$ observações.

Com os $n-2$ pontos novos, vem

$$N_O = 3(n-2)$$

incógnitas, ou parâmetros do sistema, resultando de igual modo, o mesmo valor de redundância do sistema

$$r = N - N_O = 3n-2 - 3(n-2) = 4.$$

6.2 Cálculo e ajustamento

6.2.1 Precisões e tolerâncias dos erros de fecho

Para o fecho angular, vamos supor que

$$\varepsilon_\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i - [R_n + n\Pi - R_0]$$

donde, aplicando a lei geral de propagação de erros para funções lineares, vem

$$\sigma_{\varepsilon_\alpha}^2 = \sigma_{R_0}^2 + \sum_i \sigma_{\alpha_i}^2 + \sigma_{R_n}^2 \quad (6.9)$$

considerando de igual precisão, quer os rumos, quer os ângulos, estes porque são medidos com o mesmo aparelho e de igual modo, tem-se como precisão para o erro de fecho

$$\sigma_{\varepsilon_\alpha} = \sqrt{2\sigma_R^2 + n\sigma_\alpha^2}.$$

Para os caso particulares de poligonais fechadas, em que $R_0 = R_n$, temos

$$\sigma_{\varepsilon_\alpha} = \sqrt{n}\sigma_\alpha.$$

Como tolerância do erro de fecho angular, se considerarmos a semi-amplitude do intervalo de confiança a 99%, temos

$$\varepsilon_{\alpha} \leq 2.6\sigma_{\varepsilon_{\alpha}} = 2.6\sqrt{n}\sigma_{\alpha}. \quad (6.10a)$$

Em termos clássicos, a tolerância para o erro de fecho angular é

$$|f_{\alpha}| < \sqrt{n} \quad (6.10b)$$

em unidades de minuto de arco, no sistema centesimal ou mesmo no sexagesimal. Curiosamente, esta expressão é igual à anterior para uma precisão angular de cerca de 20'' e uma confiança de 99.9% (com factor de confiança igual a 3).

O fecho linear ou planimétrico define a distância entre o ponto dado pelas coordenadas finais transportadas e o ponto dado pelas coordenadas do ponto de apoio de chegada. Pode ser definido pela expressão (6.6), em que $\varepsilon_M, \varepsilon_P$ são os fechos planimétricos relativos às coordenadas M e P.

Diferenciando a expressão de ε_l , resulta

$$d\varepsilon_l = \frac{\varepsilon_M}{\sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_P^2}} d\varepsilon_M + \frac{\varepsilon_P}{\sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_P^2}} d\varepsilon_P$$

donde, por aplicação da lei geral de propagação dos erros, obtém-se a variância de ε_l

$$\sigma_{\varepsilon_l}^2 = \left(\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_l}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_M}^2 + \left(\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_l}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_P}^2 \quad (6.11)$$

Então, para uma confiança de 99%, a tolerância para o erro de fecho planimétrico é

$$\varepsilon_T = 2.6\sigma_{\varepsilon_l} = 2.6\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_l}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_M}^2 + \left(\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_l}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_P}^2} \quad (6.12a)$$

Em termos clássicos, a tolerância para o erro de fecho planimétrico é dada por

$$|f_l(m)| < 0.005\sqrt{L(Km)} + 0.05. \quad (6.12b)$$

Para se determinar as precisões $\sigma_{\varepsilon_M}, \sigma_{\varepsilon_P}$ que intervêm na expressão (6.12a) da tolerância ε_T , vamos primeiro considerar as expressões (6.2) de transporte das coordenadas (M,P) e sobre elas aplicar a lei de propagação geral dos erros, resultando

$$\begin{aligned}\sigma_{M_k}^2 &= \sigma_{M_1}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\sin^2 R_i \sigma_{D_i}^2 + D_i^2 \cos^2 R_i \sigma_{R_i}^2 \right] \\ \sigma_{P_k}^2 &= \sigma_{P_1}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\cos^2 R_i \sigma_{D_i}^2 + D_i^2 \sin^2 R_i \sigma_{R_i}^2 \right]\end{aligned}\quad (6.13)$$

onde, $\sigma_{D_i}^2 = p^2 + q^2 D_i^2$ é a variância dos comprimentos, cujos parâmetros p e q são dados pelo construtor do distanciômetro, e $\sigma_{R_i}^2 = \sigma_{R_o}^2 + \sum_i \sigma_{\alpha_i}^2$ é a variância do rumo.

Como $\varepsilon_M = M'_n - M_n$ e $\varepsilon_P = P'_n - P_n$, obtemos de igual modo as suas variâncias

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon_M}^2 &= \sigma_{M'_n}^2 + \sigma_{M_n}^2 \\ \sigma_{\varepsilon_P}^2 &= \sigma_{P'_n}^2 + \sigma_{P_n}^2\end{aligned}$$

substituindo agora nestas expressões as expressões anteriores (6.13) e, considerando que

$$\sin R_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{D_i} \quad \text{e} \quad \cos R_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{D_i}$$

temos finalmente as variâncias dos erros de fecho planimétrico

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon_M}^2 &= \sigma_{M_1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(\frac{M_{i+1} - M_i}{D_i} \right)^2 \sigma_{D_i}^2 + (P_{i+1} - P_i)^2 \sigma_{R_i}^2 \right] + \sigma_{M_n}^2 \\ \sigma_{\varepsilon_P}^2 &= \sigma_{P_1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(\frac{P_{i+1} - P_i}{D_i} \right)^2 \sigma_{D_i}^2 + (M_{i+1} - M_i)^2 \sigma_{R_i}^2 \right] + \sigma_{P_n}^2\end{aligned}\quad (6.14)$$

Este tipo de cálculo da tolerância do erro de fecho planimétrico (6.12a), feito à custa das precisões dos erros de fecho em M e P (6.14), é demasiado elaborado para que se possa implementar à mão, pelo que não fará sentido esse tipo de análise num simples cálculo de poligonais. Sendo certo que este tipo de teste é, do ponto de vista estatístico, mais correcto, ele só será possível de ser implementado, de modo fácil, em cálculo computacional.

Para o fecho altimétrico e considerando observação de zenitais simples, onde

$$\varepsilon_H = H'_n - H_n = H_1 + \sum (D_i \cot g Z_i + h I_i - h A_i) - H_n$$

e sob a aplicação da lei geral de propagação de erros, resulta a sua precisão

$$\sigma_{\varepsilon_H} = \sqrt{\sigma_{H_1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\cot^2 g Z_i \sigma_{D_i}^2 + \left(\frac{D_i}{\sin^2 Z_i} \right)^2 \sigma_Z^2 + 2 \sigma_{hIA}^2 \right] + \sigma_{H_n}^2}\quad (6.15a)$$

Para o caso de observação de desníveis com zenitais recíprocas, onde o erro de fecho altimétrico é dado pela expressão (6.7), a sua precisão será dada por

$$\sigma_{\varepsilon_H} = \sqrt{\sigma_{H_1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(\frac{\Delta \cos Z_i}{2} \right)^2 \sigma_{D_i}^2 + \left(\frac{D_i \Delta \sin Z_i}{2} \right)^2 \sigma_Z^2 + 2\sigma_{H_{IA}}^2 \right] + \sigma_{H_n}^2} \quad (6.15b)$$

A tolerância, para um intervalo de semi-amplitude de confiança de 99%, será dada por

$$\varepsilon_T = 2.6 \sigma_{\varepsilon_H} . \quad (6.16a)$$

Em termos clássicos, a tolerância é dada pela seguinte expressão, onde **n** representa o número total de lados da poligonal

$$|f_n(m)| < 0.03\sqrt{n-1} + 0.1 \quad (6.16b)$$

6.2.2 Método clássico de ajustamento

A aplicação deste método passa pela distribuição proporcional dos erros de fecho pelas observações. A distribuição deve ser feita na proporção directa da distância dos lados, quer para o caso das coordenadas planimétricas quer da coordenada altimétrica, pois as suas precisões são, geralmente, directamente proporcionais às distâncias. E será de igual proporção para os ângulos horizontais, porque estes são observados com igual precisão, para o mesmo aparelho e mesma metodologia.

É um processo sequencial, onde em primeiro lugar se procede ao cálculo e distribuição do erro de fecho angular, de seguida procede-se ao cálculo e distribuição dos restantes erros de fecho, e só depois é que se procede ao cálculo das coordenadas dos pontos da poligonal. A razão para tal procedimento, reside no facto de o fecho angular depender exclusivamente dos ângulos, enquanto que os restantes erros já dependem dos ângulos e das distância observados.

Seja então, o erro de fecho angular dado pela expressão (6.4), dividindo-se esse erro pelo número total de ângulos observados, obtem-se o simétrico da correcção a fazer a cada ângulo

$$\alpha_i = \alpha'_i - \frac{\varepsilon_\alpha}{n} \quad (6.17a)$$

Considerando os rumos observados, a correcção directa aos rumos é dada por

$$R_i = R'_i - \frac{i}{n} \varepsilon_\alpha \quad (6.17b)$$

Após a distribuição do erro de fecho angular, procede-se à determinação dos erros de fecho planimétricos. A distribuição destes fechos é feita sobre as diferenças das coordenadas ΔM_i , ΔP_i dos pontos sucessivos, na proporção directa das distâncias de D_i/L , onde L é o desenvolvimento da poligonal ($L=\sum D_i$).

Sendo, $\varepsilon_M = M'_n - M_n$ e $\varepsilon_P = P'_n - P_n$ então, os valores corrigidos serão dados por

$$\begin{aligned}\Delta M_i &= \Delta M'_i - \frac{D_i}{L} \varepsilon_M \Rightarrow M_i = M'_i - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} D_k}{L} \varepsilon_M \\ \Delta P_i &= \Delta P'_i - \frac{D_i}{L} \varepsilon_P \Rightarrow P_i = P'_i - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} D_k}{L} \varepsilon_P\end{aligned}\quad (6.18)$$

Da mesma forma, se procede com o erro de fecho altimétrico, sendo $\varepsilon_H = H'_n - H_n$ então

$$\Delta H_i = \Delta H'_i - \frac{D_i}{L} \varepsilon_H \Rightarrow H_i = H'_i - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} D_k}{L} \varepsilon_H \quad (6.19)$$

Resumidamente, pode-se apresentar o algoritmo da seguinte forma:

Planimetria

- 1º calcular ε_α
- se $\varepsilon_\alpha < \varepsilon_T(\alpha)$ então
- 2º distribuir ε_α por R_i
- 3º calcular $\varepsilon_M, \varepsilon_P, \varepsilon_l$
- se $\varepsilon_l < \varepsilon_T(M,P)$ então
- 4º distribuir ε_M e ε_P por M_i e P_i

Altimetria

- 1º calcular ε_H
- se $\varepsilon_H < \varepsilon_T(H)$ então
- 2º distribuir ε_H por H_i

6.2.3 Ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados

Apesar de poder-se formular o modelo funcional de ajustamento de poligonais com o método de equações de observação, tal como foi feito para a intersecção inversa, iremos adoptar aqui o método de equações de condição por ser mais simples e apresentar uma analogia com o método clássico de compensação.

Tomemos como referência a configuração geométrica de uma poligonal aberta com n pontos estacionados ($n-1$ lados). Tal como verificámos em cada um dos casos, teremos uma **redundância do sistema**, $r = N - N_0 = 4$; com um total de $N=3n-2$ observações (n ângulos, $n-1$ comprimentos e $n-1$ desníveis), e $n-1$ pontos novos (a coordenar), ou seja $N_0=3n-6$ coordenadas a determinar.

Teremos então, um sistema de **$r = 4$ equações de condição** só com observações, que serão exactamente as equações de condição de fecho da poligonal:

$$\varepsilon_R = 0; \quad \varepsilon_M = 0; \quad \varepsilon_P = 0; \quad \varepsilon_H = 0 \quad (6.20)$$

Assumindo o seguinte vector de observações $l = (D_1, \dots, D_{n-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \Delta H_1 - \Delta H_{n-1})$ podemos escrever as equações de condição na forma desenvolvida

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - [R'_n - R_0 + n\Pi] = 0 \quad (6.21a)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} D_i \cos R_i + [M_1 - M'_n] = 0 \quad (6.21b)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} D_i \sin R_i + [P_1 - P'_n] = 0 \quad (6.21c)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (D_i \cot g \beta_i + h_i^i - h_A^i) + [H_1 - H'_n] = 0 \quad (6.21d)$$

Definidas as equações de condição, vamos deduzir o nosso modelo matemático completo para o método dos mínimos quadrados segundo o formalismo matricial. Começemos por definir o modelo funcional e a sua solução do caso geral $F(l, X) = 0$. Este caso apresenta, após uma linearização, como sistema de equações lineares

$$A.\Delta l + B.\Delta X = f \quad (6.22)$$

onde

$$\Delta l = V$$

resíduos

$$\Delta X$$

correção às coordenadas (parâmetros)

$$A = \frac{\partial F}{\partial l}; \quad B = \frac{\partial F}{\partial X}$$

componentes da matriz jacobiana de F

e como solução de (6.22)

$$\Delta X = (B^T P B)^{-1} B^T P f \quad (6.23a)$$

$$\Delta l = V = Q A^T P (-B \Delta X + f) \quad (6.23b)$$

onde

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma \quad \text{matriz cofactor, e } \Sigma \text{ a matriz cofactor}$$

$$P = (A Q A^T)^{-1} \quad \text{matriz dos pesos}$$

Reduzindo-se o caso geral a $F(l) = 0$ (caso particular de equações de condição), desaparecem todos os termos que dependem do vector de parâmetros X, inexistente no nosso modelo. Assim, temos as seguintes equações matriciais para o sistema de equações lineares e para a solução

$$A.\Delta l = f \quad (6.24)$$

$$\Delta l = V = Q A^T P f \quad (6.25)$$

resultando o vector das observações ajustadas por $\hat{l} = l + V$.

Os elementos da matriz A (derivadas parciais dos erros de fecho) e do vector independente (f) são calculados a partir das observações.

O ajustamento por mínimos quadrados deve de ser feito com um processo iterativo, já que resulta de um processo de linearização de um funcional. A solução das observações ajustadas deve

então, entrar novamente como valor inicial do sistema de equações lineares, repetindo-se o processo até o vector independente (f), vector dos erros de fecho, apresentar valores nulos para uma dada aproximação.

Após se efectuar o ajustamento das observações, proceder-se-á ao cálculo final das coordenadas dos pontos da poligonal por simples transporte de coordenadas.

Modelo estocástico

O modelo estocástico estabelece as relações de precisão e correlação dos parâmetros do sistema funcional. Consideremos aqui, por uma questão de simplicidade, a inexistência de correlação entre as observações (observações independentes), apesar dela existir entre os desníveis e os comprimentos. Neste caso teremos os elementos iniciais do modelo estocástico definidos por matrizes diagonais, ou seja:

$$P = Q_{II}^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_{II}^{-1} = \frac{\sigma_0^2}{\text{diag}(\sigma_{D_1}^2, \dots, \sigma_{D_{n-1}}^2, \sigma_{\alpha_1}^2, \dots, \sigma_{\alpha_n}^2, \sigma_{\Delta H_1}^2, \dots, \sigma_{\Delta H_{n-1}}^2)} \quad (6.26)$$

Onde os elementos diagonais, variância das observações, podem ser determinados do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^2 &= \sigma_{\alpha}^2 && \text{(da precisão do teodolito)} \\ \sigma_{D_i}^2 &= p^2 + q^2 D_i^2 && (p \text{ e } q, \text{ parâmetros do distanciómetro}) \\ \sigma_{\Delta H}^2 &= \cot^2 g^2 z_i \cdot \sigma_{D_i}^2 + (D_i \sec^2 z_i)^2 \cdot \sigma_{\alpha}^2 \end{aligned}$$

A variância de referência *à priori* (σ_0^2) deve ser assumida de acordo com a configuração do sistema matemático; ou seja, de acordo com a precisão instrumental, a geometria da poligonal e a experiência do operador. De um outro modo, ela tem de estar de acordo com as fontes de erro e suas influências no modelo.

À posteriori podemos determinar estimativas da variância de referência e das variâncias, ou precisões, das observações ajustadas. Assim, temos a variância de referência *à posteriori*

$$s_0^2 = \frac{V^T P V}{4} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{3n-2} \frac{v_i^2}{q_{ii}} \quad (6.27)$$

e a matriz das variâncias e covariâncias das observações

$$Q_{II} = Q - Q A^T P A Q \quad (6.28)$$

Teste da razão de variâncias

À semelhança do do ajustamento clássico, também aqui podemos estabelecer tolerâncias ou critério de aceitação da poligonal. Este critério passa pela realização de um teste estatístico que se faz à variância de referência.

Pretende-se testar se as variâncias *à posteriori* são estatisticamente iguais ou diferentes das variâncias *à priori*, se as condições de observacionalidade são coerrentes e estão dentro da precisão prevista. Pode-se testar se o conjunto instrumento+operador está a observar correctamente ou não, se está a observar bem de mais, dentro do aceitável, ou mal de mais. Para isso, podem-se realizar testes bilaterais ou testes unilaterais, isto é, pode-se testar a diferença

estatística das variâncias de referência, *à priori* e *à posteriori*, nos dois sentidos (maior e menor) ou individualmente em cada um dos sentidos.

Mais concretamente, podemos proceder aos seguintes testes:

$$\text{Bilateral} \rightarrow H_0 : s_0^2 = \sigma_0^2 \vee H_1 : s_0^2 < \sigma_0^2 \vee s_0^2 > \sigma_0^2$$

$$\text{Unilateral} \rightarrow H_0 : s_0^2 = \sigma_0^2 \vee H_1 : s_0^2 < \sigma_0^2$$

$$\text{Unilateral} \rightarrow H_0 : s_0^2 = \sigma_0^2 \vee H_1 : s_0^2 > \sigma_0^2$$

O teste pode ser feito quer segundo a função de distribuição Fisher (F) que segundo a função de distribuição Qui Quadrado (χ^2), dado que a função de Fisher resulta da divisão de duas funções de Qui Quadrado.

Teste de Fisher

$$H_0 : s_0^2 = \sigma_0^2 \vee H_1 : s_0^2 > \sigma_0^2 \quad \text{Rejeitar se: } \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} > F_{r, \infty, 1-\alpha}$$

Teste de Qui Quadrado

$$H_0 : s_0^2 = \sigma_0^2 \vee H_1 : s_0^2 > \sigma_0^2 \quad \text{Rejeitar se: } \frac{rs_0^2}{\sigma_0^2} > \chi_{r, 1-\alpha}^2$$

Para $\sigma_0 = 1$, $r = 4$ graus de liberdade e uma confiança ($\beta=1-\alpha$) de 99% (incerteza α de 1%) temos os seguintes valores: $\chi_{4, 0.99}^2 = 13,18$ e $F_{4, \infty, 0.99} = 3,32$.

Existe uma relação estreita entre o resultado das tolerâncias estabelecidas anteriormente e os resultados deste teste. A sua parametrização deve depender dos aparelhos, da geometria e das condições de observação, e não ser geral para qualquer caso.

Este caso particular do modelo matemático de ajustamento com equações de condição apresenta uma desvantagem face ao caso particular do modelo de ajustamento com equações de observação, também designado por método de variação de parâmetros. Essa desvantagem é a ausência da variâncias e covariâncias das coordenadas (parâmetros), por estas se encontrarem ausentes neste modelo. Contudo, existe uma forma de deduzir a precisão das coordenadas resultantes, por aplicação da lei de propagação das variâncias e covariâncias das observações partindo do ponto de apoio mais próximo.

7. LEVANTAMENTO DE PORMENOR

Os pontos de pormenor são os pontos que terminam a cadeia no processo de levantamento topográfico. São eles que definem a topografia do terreno com o pormenor permitido pela escala da carta, e que permitem definir a localização, orientação e dimensão dos objectos e lugares da superfície terrestre.

Quanto ao métodos utilizados, eles podem ser divididos em: métodos topográfico e método fotogramétrico. O primeiro, o âmbito desta nossa disciplina, é utilizado para áreas pequenas e em escalas grandes, normalmente superiores a 1/500; o segundo, âmbito da disciplina de Fotogrametria, é utilizado para áreas grandes e em escalas pequenas, normalmente superiores a 1/1000, podendo ser utilizado na escala de 1/500 se a área e o custo o justificar. Pode-se dizer que no limite da escolha do método a adoptar, os factores que influenciam a decisão são: economia, tempo e recursos.

Os pontos de pormenor são coordenados a partir dos pontos de apoio, normalmente os pontos da poligonal ou pontos auxiliares coordenados a partir da poligonal ou a partir de qualquer outro ponto coordenado previamente. Podem também ser os próprios vértices geodésicos, caso se encontrem dentro da zona de levantamento e com a intervisibilidade necessária à coordenação dos pontos de pormenor.

São pontos sempre coordenados por irradiação, através do método de irradiação simples, quer pelo método convencional de estação total mais alvo, quer pelo método moderno de GPS relativo em modo rápido-estático ou em modo cinemático (para-arranca ou cinemático contínuo).

O apoio à coordenação, pelo método convencional, necessita de um ponto nas imediações já coordenado e intervisibilidade entre esse ponto e o ponto de pormenor a coordenar.

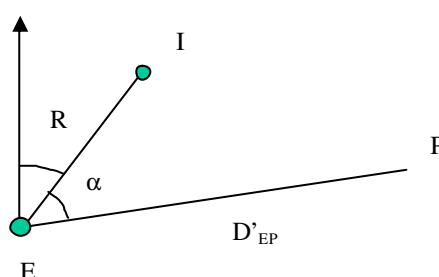


Figura 7.1 – Irradiação simples na coordenação de pontos de pormenor.

$$\begin{aligned}
 M_P &= M_E + D'_{EP} \cdot \sin(R_{EI} + \alpha) \\
 P_P &= P_E + D'_{EP} \cdot \cos(R_{EI} + \alpha) \\
 C_P &= C_E + D_{EP} \cdot \cot g(Z_{EP}) + h_i - h_a
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

As observações (ângulo e distância) devem ser reduzidas ao respectivo sistema de coordenadas cartográficas. O ângulo deve ser reduzido à sua referência, o rumo cartográfico, com um rumo de referência, consistindo na operação de orientação do giro; e a distância tem de ser

reduzida ao plano cartográfico. Esta correcção à distância deve contemplar a correcção atmosférica (apenas para distâncias por métodos electromagnéticos), a redução ao plano horizontal, a redução ao elipsóide de referência e finalmente a correcção da projecção cartográfica. A correcção atmosférica e a redução ao plano horizontal são efectuadas dentro do próprio aparelho, se este for uma estação electrónica; já o resto das correcções de redução podem ser feitas à posteriori por meio de cálculo rigoroso, ou através de um factor de escala calculado para a zona e introduzido no aparelho (no factor ppm), ou mesmo serem desprezadas se o efeito sobre a distância for inferior à precisão utilizada.

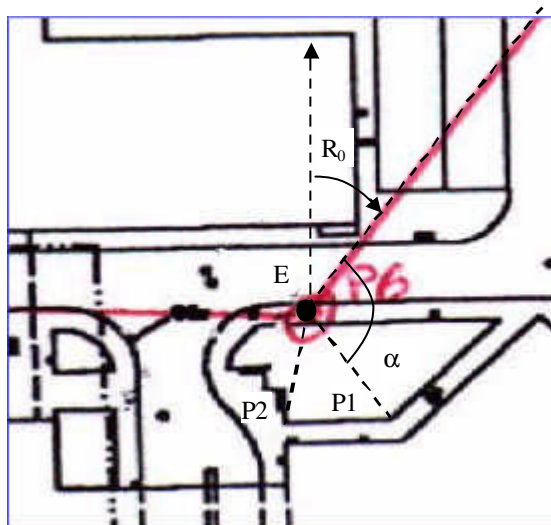


Figura 7.2 – Coordenação de ponto de pormenor com orientação do giro.

Relativamente à operação de orientação, ela pode ser feita de três formas, obrigando contudo à existência de uma direcção referenciada e com origem no ponto de apoio. Pode ser feita: 1) de forma desorientada, com o 0° do limbo numa direcção arbitrária, obrigando o conhecimento da leitura para a direcção de referência ($l_{p0}=nn^\circ$); 2) semi-orientada, com o 0° do limbo na direcção de referência ($l_{p0}=0^\circ$), resultando o valor do ângulo igual à própria leitura do ponto; e 3) orientada, com o valor do rumo de orientação introduzido na direcção de referência ($l_{p0}=R_0$).

O rumo de orientação do giro da irradiada provem da compensação da poligonal ou é deduzido a partir das coordenadas do ponto de apoio e do ponto de orientação. Pode também, embora com menor precisão, resultar de uma orientação magnética (bússula) ou de uma orientação astronómica (sol ou estrelas), a chamada orientação em modo declinado.

Relativamente à altimetria, impõe-se sempre o cuidado de medir a altura do instrumento e do alvo, com precisão sub-centrímetrica e desde o ponto materializado no solo até ao centro geométrico do instrumento/alvo (intersecção dos eixos associados).

Planimetria

A planimetria é definida pelos pontos projectados no plano cartográfico dos elementos topográficos - objectos, infraestruturas e delimitações de áreas, definidos apenas pelo par de coordenadas planimétricas (M, P).

Os elementos topográficos incluídos são de dois tipos: os que têm dimensão à escala ($d=3 \times dt$, com $dt=0.3\text{mm}$ – dimensão mínima do traço); ou os que não tendo representação, por serem de dimensão reduzida, têm importância relevante e são representados através de símbolos. Teremos, portanto, uma representação à escala e uma representação por simbologia.

A simbologia e as especificações gráficas utilizadas na representação são normalmente definidas por um catálogo de objectos, catálogo esse que sendo semelhante dentro da mesma escala para qualquer levantamento topográfico, variará de escala para escala. Esse catálogo de objectos deve ser definido pelas instituições reguladoras da cartografia nacional, caso do Instituto Português de Cartografia e Cadastro em Portugal, podendo, contudo, em casos particulares fugir-se a essas especificações.

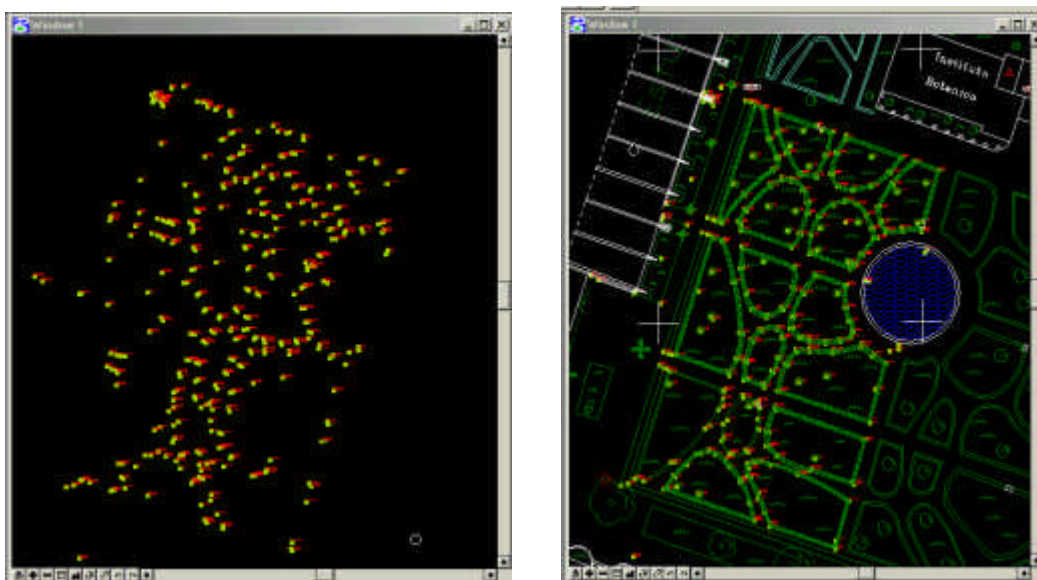


Figura 7.3 – Pontos de pormenor e sua edição.

A informação proveniente do campo, além do conjunto de coordenadas e designações dos pontos de pormenor, deve também conter informação de categorização e conexão dos elementos, bem como a representação do levantamento por meio de um croqui de forma a poder ajudar na edição topográfica. Pois normalmente, quem edita não é quem executa os levantamentos no terreno, pelo que a informação que passa para o gabinete deve ser completa e sem causar qualquer tipo de ambiguidade ou omissão.

Até aqui temos vindo sempre a fazer referência ao encadeamento topográfico, colocando a ligação do esqueleto de levantamento à rede geodésica no início do processo e o levantamento de pormenor no fim. Contudo, é sempre possível quebrar este encadeamento, justificado pelas mais

diversas razões, como seja a falta de recursos para a dita ligação, ou mesmo, a ausência da necessidade de uma referenciação dita cartográfica, uma mera projecção local. Obtém-se do mesmo modo o mesmo resultado final, querendo isso dizer que a ligação à rede pode ser feita à posteriori sem perda de rigor de posicionamento.

Vamos supor que se efectuou o levantamento de pormenor antes da ligação à rede, optando-se entretanto por um sistema de referência local. Como é que se pode então referenciar este levantamento com a ligação feita à posteriori? A resposta é óbvia, através de uma transformação de coordenadas com 4 parâmetros entre os dois sistemas de referência (local e rede geodésica). Com um mínimo de dois pontos coordenados nos dois sistemas podemos determinar os parâmetros de transformação (2 translações – T_M, T_P , 1 rotação – θ e um factor de escala – α) através de uma transformação afim, mais propriamente transformação de Helmert, pela resolução de um sistema de equações lineares de dimensão 4x4 (7.2).

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ P_1 \\ M_2 \\ P_2 \end{bmatrix}_{S1} = \begin{bmatrix} T_M \\ T_P \\ T_M \\ T_P \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ P_1 \\ M_2 \\ P_2 \end{bmatrix}_{S2} \quad (7.2)$$

A resolução deste sistema em ordem aos parâmetros de transformação (T_M, T_P, α, θ) passa por um processo iterativo com o sistema linearizado.

Pode também ser feita de forma empírica através da média da diferença dos rumos, diferença de coordenadas e diferença dos comprimentos nos dois sistemas.

Altimetria

Os pontos de pormenor altimétrico permitem determinar o Modelo Digital de Terreno (DTM). São formados por uma parte ou pela totalidade dos pontos de pormenor planimétrico e ainda por pontos específicos de altimetria, os quais se situam em zonas com relevo e sem elementos topográficos. Dos pontos de planimetria são excluídos todos aqueles que não se situam sobre o terreno ou que se situam dentro de construções ou áreas onde o DTM não será determinado.

Estes pontos específicos de altimetria devem-se distribuir por malhas regulares ou irregulares, dependendo da forma do terreno. A sua densidade depende da variação do declive e da rugosidade do terreno (perturbações e reentrâncias), causadas pela morfologia normal do terreno ou pela presença de linhas de água, vias de comunicação, ou qualquer outro tipo de aterro e desaterro. As maiores densidades dão-se em terrenos com rugosidade, com declives variáveis, e em escalas grandes; enquanto que as menores densidade verificam-se em terrenos sem rugosidade, nos declives constantes, e em escalas pequenas.

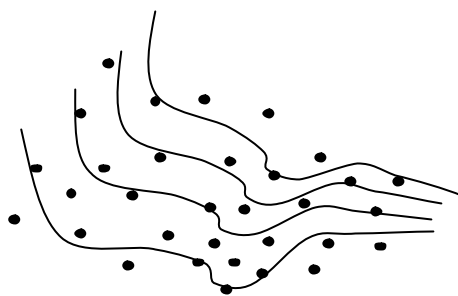


Figura 7.4 – Malha irregular de pontos de altimetria.

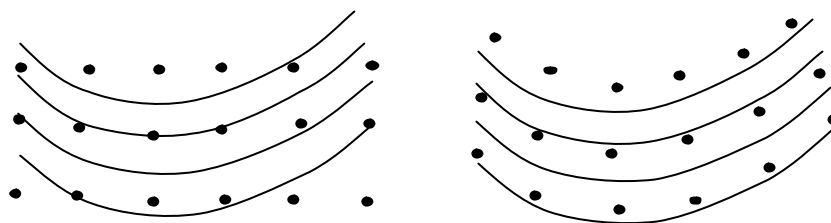


Figura 7.5 – Malhas regulares de pontos de altimetria.

O DTM pode ser constituído quer por curvas de nível, quer por uma grelha de pontos, quer por elementos finito (triângulos). Em termos de representação gráfica a forma mais cumumente usada é por curvas de nível, aliás é a que é usada na cartografia convencional ou métrica.

Os pontos são unidos por linhas formando triângulos que definem de forma polifacetada a superfície a representar. A determinação das curvas de nível da topografia do terreno é feita através de interpolações lineares sobre as linhas de declive constante que unem os pontos da malha e que constituem a triangulação da superfície (Fig. 7.6). Os pontos que resultam da interpolação linear com valor constante são unidos formando assim a curva de nível.

Um dos elementos fundamentais do trabalho de campo é o registo de dados. Hoje em dia, na era da cartografia digital, este registo tornou-se mais completo; para além das simples coordenadas e designações dos pontos, são acrescentados uma série de códigos (multicódigos) para facilitar a sua implementação na edição, a sua identificação e classificação nas bases de dados de que possam vir a fazer parte. É claro que esta tarefa está cada vez mais facilitada, dada a sofisticação electrónica do equipamento e sua conexão para transferência dos dados.

Temos como elementos fundamentais no registo de dados: folha ou caderno de registo de observações e notas de campo; ficheiro com dados dos pontos fixos ou de apoio; ficheiro com multicódigos; ficheiro final dos pontos levantados; e uma folha com desenhos e croquis de disposição geométrica do levantamento.

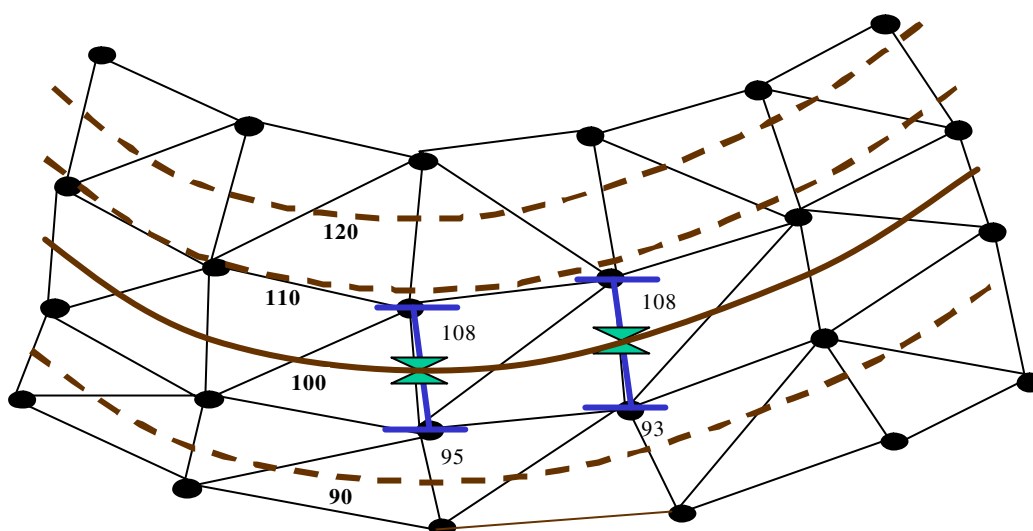


Figura 7.6 – Interpolação das curvas de nível.



Figura 7.7 – Plata Topográfica de uma parcela do Jardim Botânico de Lisboa.

8. EDIÇÃO TOPOGRÁFICO

A edição topográfica, ou mais genericamente, edição cartográfica, é a componente de desenho assistido por computador (CAD – Computer Aid Design) que elabora a carta ou planta em formato digital, sempre convertível em formato analógico (carta) através da impressão em sofisticadas impressoras a jacto de tinta ou a *laser*. A utilização de CAD está hoje em dia generalizada na edição cartográfica, de tal modo, que a profissão de desenhador topográfico é uma função extinta nos moldes em que era entendida, os profissionais desta área foram convertidos em operadores de desenho informático. E elaborar e editar uma planta ou carta num computador através de um programa CAD é uma tarefa ao alcance de qualquer minimamente entendida em topografia e informática.

Tal como nas operações de campo se pode separar a planimetria da altimetria, também aqui o mesmo acontece. Os programas mais sofisticados separam mesmo, quer ao nível dos ficheiros quer ao nível das respectivas aplicações, essas duas operações. Portanto, é comum encontrarem-se programas CAD que operam a planimetria em ficheiro com formato 2D e a altimetria em ficheiros com formato 3D. No entanto, encontram-se programas CAD nos quais apenas existem ficheiros em formato 3D, como é o exemplo do formato DXF.

Edição Planimétrica

As etapas da edição planimétrica, basicamente, resumem-se a: 1) gerar e configurar um ficheiro 2D; 2) carregar os pontos de pormenor planimétrico a partir dos ficheiros de campo; 3) carregar o ficheiros de células ou do catálogo de objectos; 4) gerar e editar os elementos topográficos a representar; 5) referenciar a área útil do ficheiro com uma moldura que conterá, entre outros elementos, a escala e a legenda; e 6) finalmente imprimir à escala desejada.

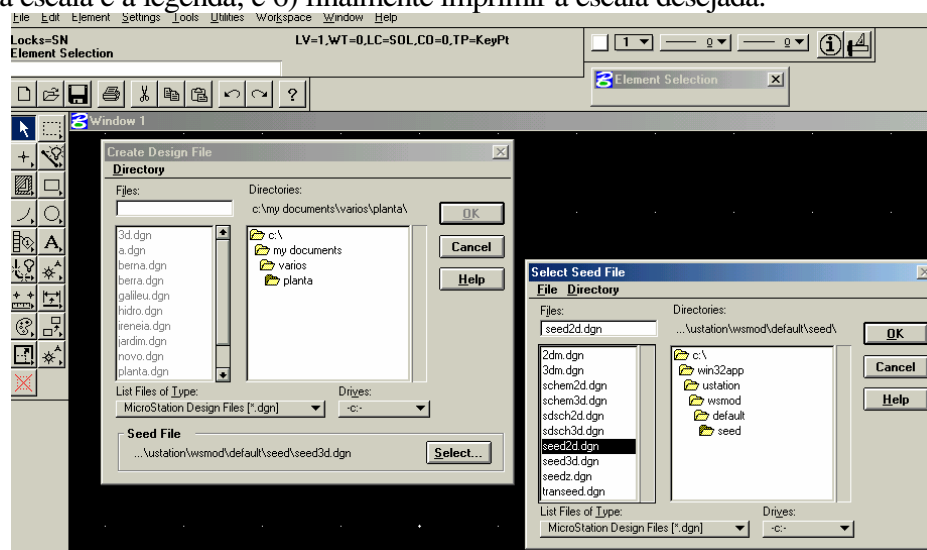


Figura 8.1 – Gerar um ficheiro 2D em Microstation.

Para gerar um ficheiro recorre-se ao ficheiro tipo já existente no programa CAD (Fig. 8.1), sobre o qual se deve dar o nome provisório de edição. Após se gerar o ficheiro deve-se então configurá-lo (Fig. 8.2), de modo que as unidade de trabalho e a sua resolução (número de pontos que constituem a área de trabalho do ficheiro) sejam correctamente definidas de acordo com a escala da planta e respectiva dimensão da área de trabalho.

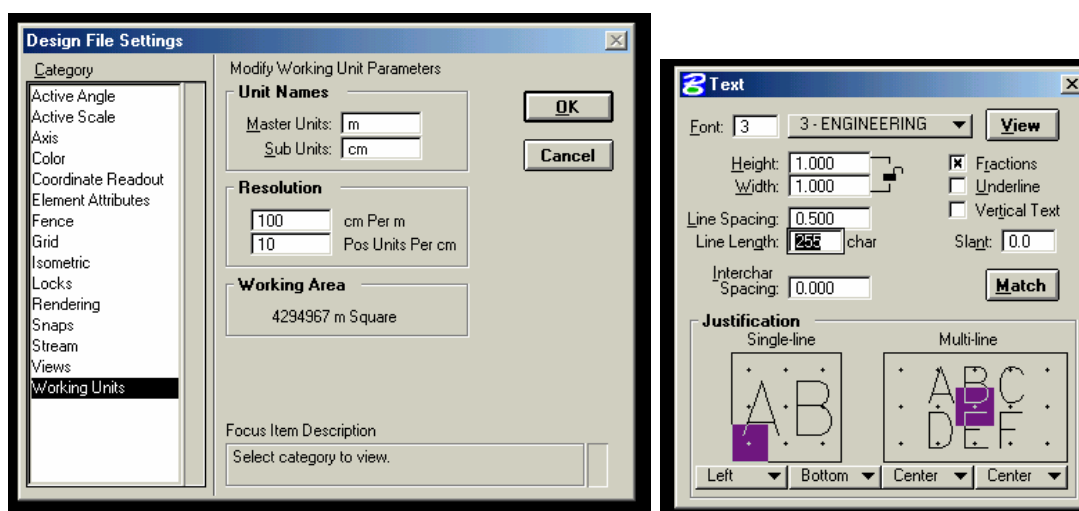


Figura 8.2 – Configuração do ficheiro, unidades, resolução e texto.

A Tabela 8.1 mostra dois formatos possíveis de um ficheiro com as coordenadas dos pontos levantados no terreno. Esses ficheiros são depois importados para o ficheiro de de edição, através de um módulo específico (Fig. 8.3).

NOME	X	Y	Z	NOME	CEL	X	Y	Z
P0A1	-88967.371	-100674.521	80.281	P0A1	1	-88967.371	-100674.521	80.281
P0A2	-88970.659	-100665.792	80.274	P0A2	1	-88970.659	-100665.792	80.274
P0A3	-88970.019	-100665.516	80.276	P0A3	1	-88970.019	-100665.516	80.276
P0A4	-88971.078	-100662.730	80.283	P0A4	1	-88971.078	-100662.730	80.283
P0A5	-88971.723	-100662.985	80.289	P0A5	1	-88971.723	-100662.985	80.289
P0A6	-88976.101	-100651.492	80.275	P0A6	1	-88976.101	-100651.492	80.275

Tabela 8.1 – Ficheiro de pontos proveniente do campo em dois formatos.

Após a importação dos ficheiros dos pontos do levantamento de pormenor obtemos a sua edição no ficheiro, como é mostrado na Figura 8.4. A partir daí já é possível inserir e criar os

objectos topográficos sobre os pontos respectivos, de acordo com a informação de campo e segundo as especificações do catálogo de objectos relativo à escala a representar.

Com o auxílio de uma biblioteca de células – conjunto de símbolos que representam os elementos (Fig. 8.5), que respeite as especificações de cor, espessura, nível de informação e escala dos objectos, referenciadas no catálogo de objectos, é possível proceder à edição do ficheiro e obter uma versão final como é mostrado na Figura 8.6.

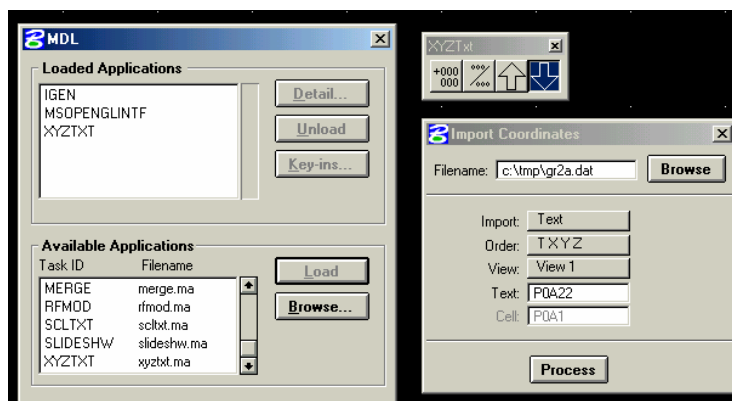


Figura 8.3 – Importação do ficheiro dos pontos.

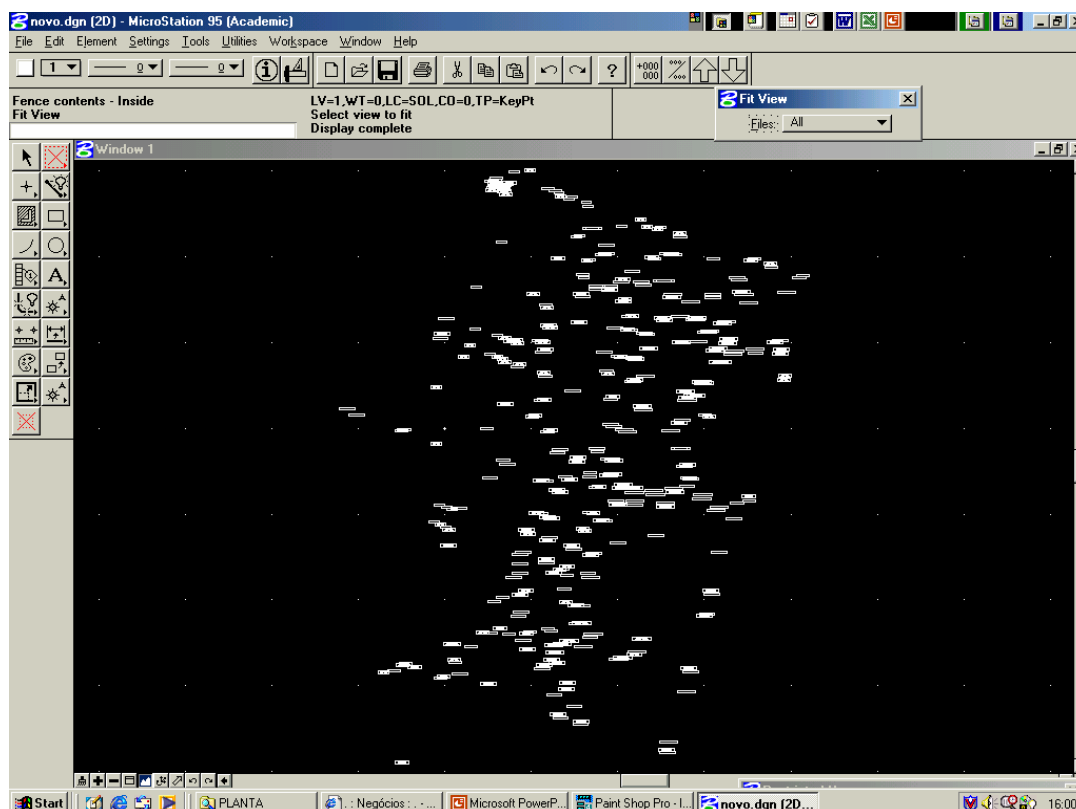


Figura 8.4 – Disposição dos pontos dentro do ficheiro de desenho.

O ficheiro desenho é constituído por níveis, de modo que toda a informação contida no ficheiro de edição cartográfica fica estratificada, ou seja, é colocada em níveis específicos e distintos. Esta estrutura permite a separação da informação para uma melhor optimização de edição e de armazenamento dessa informação. Assim, é possível através da activação e desactivação dos níveis, visualizar ou imprimir apenas a informação desejada.

A definição dos níveis onde devem ser colocados cada um dos elementos topográficos incluindo a toponímia, é definida no catálogo de objectos juntamente com os atributos desses elementos. Na própria biblioteca os níveis de cada célula devem já estar estabelecidos de forma correcta, para que quando inseridos no ficheiro esta simbologia fique no nível certo.

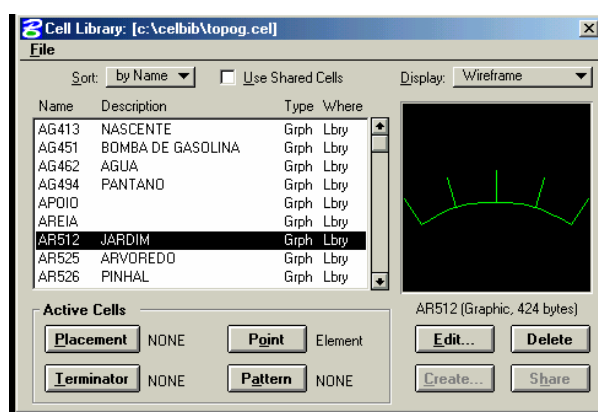


Figura 8.5 – Biblioteca de células.

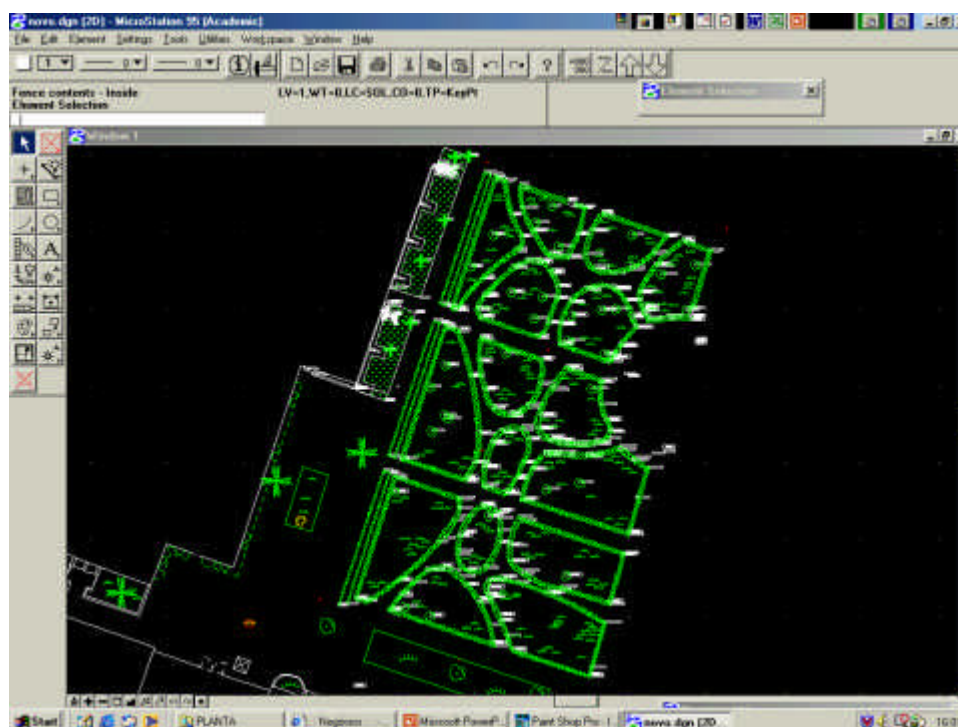


Figura 8.6 – Edição final do ficheiro com a planta do levantamento.

Edição Altimétrica

As etapas da edição altimétrica, analogamente, resumem-se a: 1) gerar e configurar um ficheiro 3D; 2) carregar os pontos de pormenor altimétrico a partir dos ficheiros de campo; 3) importar a superfície (pontos) para a aplicação de interpolação; 4) delimitar a área ou áreas para gerar o DTM; 5) triangular a superfície; 6) criara as curvas de nível com a respectiva parametrização (equidistância, cor, espessura, etc.); 7) editar pontos de cota; 8) refernciar o ficheiro 2D de planimetria (em pano de fundo); 9) cortar possíveis curvas de nível sobre edificações ou outros elementos sobre as quais elas não devam existir.

Após a completa edição da altimetria ela é, normalmente, impressa em separado da planimetria e referenciada ou não com uma moldura própria.

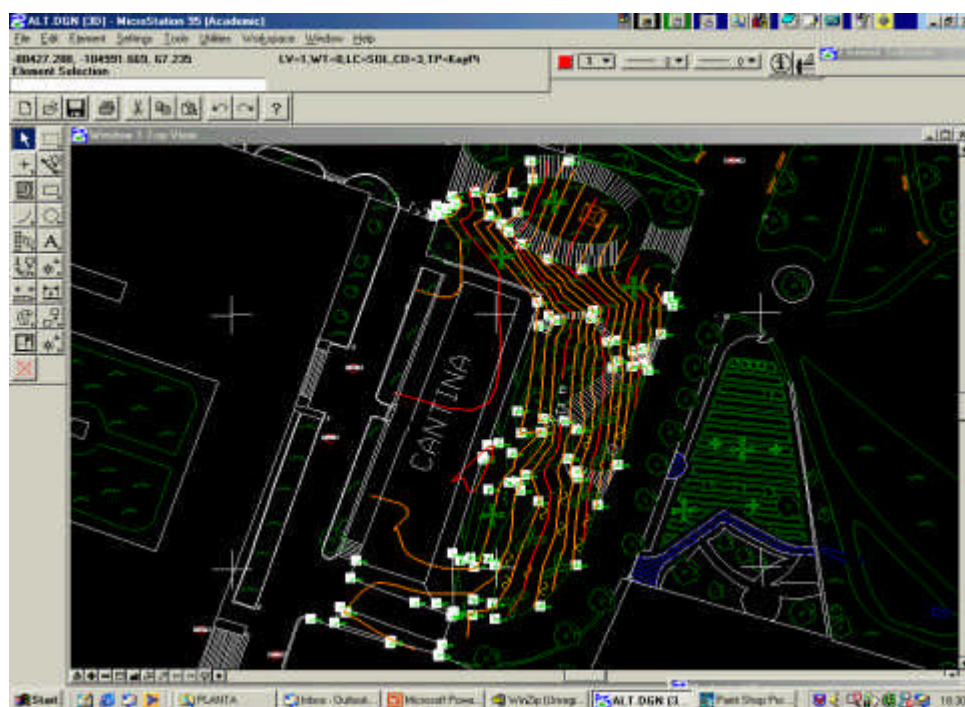


Figura 8.8 – Altimetria referenciada sobre a planimetria.

9. PLANEAMENTO E GESTÃO DE TRABALHOS EM TOPOGRAFIA

Antes de ser propriamente abordado o planeamento e a gestão em trabalhos específicos de topografia, devemos olhar para conceitos mais gerais, nomeadamente o conceito de gestão de operações.

A gestão de operações encarrega-se do estudo e implementação de mecanismos de decisão relativamente à função operações. Os directores de operações são os responsáveis pelo fornecimento de bens ou serviços nas empresas, tomando as decisões no âmbito das operações dentro do sistema da empresa.

A estratégia das operações é uma estratégia funcional que deve estar integrada e articulada com a estratégia empresarial, bem como, com as estratégias financeira e de marketing, resultando num esquema consistente para a tomada de decisões.

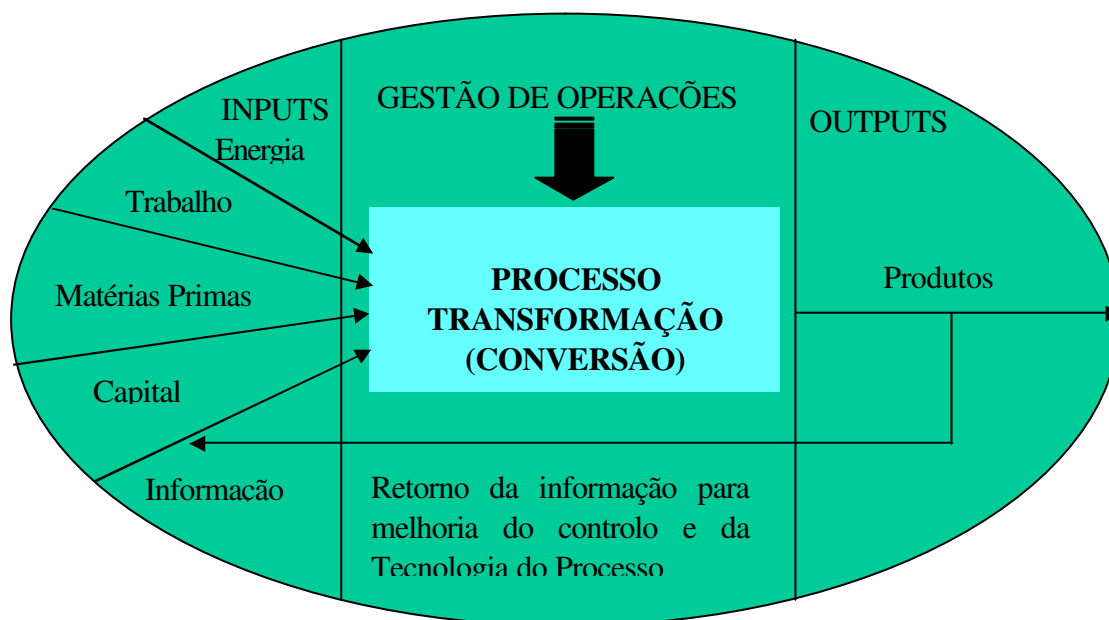


Figura 9.1 – Operações como um sistema de produção.

Em função da natureza dos objectos de decisão, pode-se dividir as operações em cinco áreas de decisão: 1) Qualidade; 2) Processo; 3) Capacidade; 4) Stocks; 5) Força de trabalho.

Qualidade – Como objectivo principal da qualidade situa-se a satisfação do cliente. Trata-se de uma área das operações para a qual é decisivo o apoio de toda a organização, desde o mais alto nível da empresa. A qualidade do produto ou serviço subentende qualidade na concepção e desenvolvimento, qualidade na produção e qualidade após venda. A decisão da qualidade prende-

se com a definições de normas e especificações, com a formação do pessoal e com o controlo da qualidade planeada.

A qualidade merece uma atenção especial, já que é o factor principal na selectividade do mercado. A preocupação constante com a satisfação do cliente, seja ele interno (dentro da empresa) seja ele externo, é uma máxima que deve estar presente em qualquer sector do sistema produtivo. A qualidade deve ser por excelência o cartão de visita de uma empresa. A qualidade, no sentido de satisfação do cliente, obtém-se quando é atingida a perfeita interação entre a produção do bem e o consumidor.

O chamado triângulo da qualidade (características – prazo de entrega – custo) deverá estar presente quer no cliente quer no fornecedor e em perfeita sintonia.

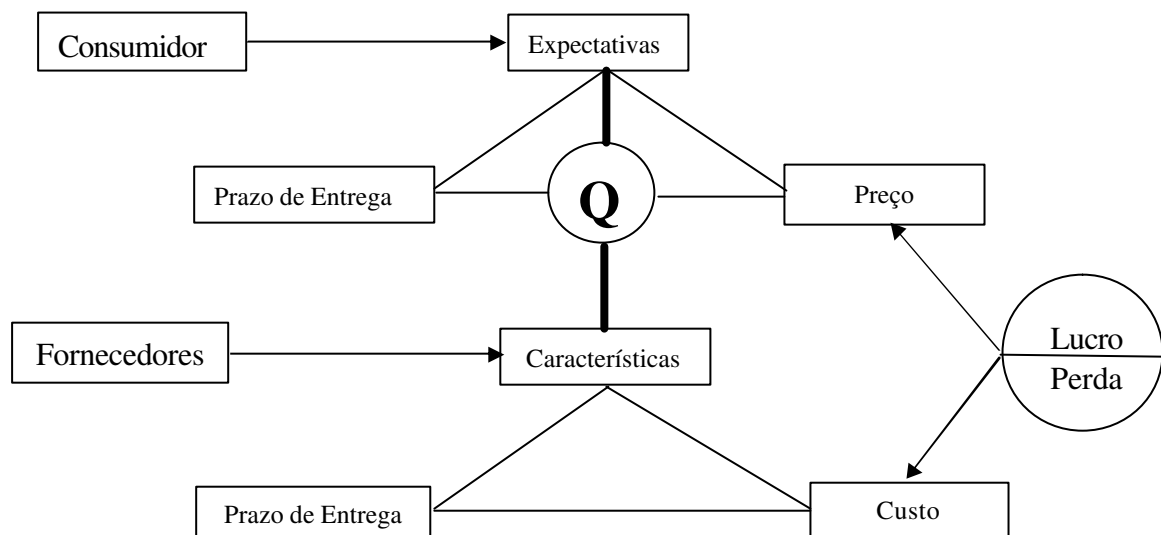


Figura 8.2 – Triângulo da Qualidade.

Em qualquer empresa deve de existir uma organização para a qualidade, isto é, deve-se estabelecer: uma política de qualidade; a organização empresarial para a qualidade; os objectivos da qualidade; a normalização para a qualidade; o planeamento e a gestão da qualidade.

Processo – Ao nível do processo a decisão diz respeito ao modelo físico de produção, em particular ao tipo de tecnologia; diz respeito aos fluxos do processo, ao desenho e implantação das instalações e respectivos espaços; e com todos os outros aspectos relacionados com a componente física. A decisão a este nível é particularmente importante, pois é no processo que o investimento é mais elevado e onde as operações escolhidas devem observar a estratégia de longo prazo para o negócio que se pretende desenvolver.

Capacidade – Este aspecto lida com as formas de disponibilizar a capacidade adequada no sítio certo e na altura certa. A longo prazo, o planeamento da capacidade implica não só a dimensão das instalações, mas também a dimensão dos recursos a afectar às operações. A curto prazo, a

programação da utilização dos diversos recursos constitui de igual forma uma componente de planeamento da capacidade.

Stoks – Trata-se da gestão do fluxo de produtos e bens ao longo do processo produtivo. As decisões relativas aos “stoks” prendem-se com: o que encomendar; quanto encomendar; e quando encomendar. Os sistemas de gestão de “stoks” são usados para administrar a compra de matérias primas, a fabricação de produtos intermédios e de produtos finais.

Força de trabalho – A gestão dos recursos humanos é uma das componentes fundamentais das operações; por mais automatizado que seja o processo produtivo, nada é feito sem as pessoas que produzem. Com base nos índices de produtividade, as decisões relativas à gestão do pessoal prendem-se com processos de selecção, contratação, despedimentos, formação, supervisão, compensação e motivação.

Planeamento de Levantamentos Topográficos

Apesar dos trabalhos a executar nos levantamentos topográficos não sofrerem grandes modificações de levantamento para levantamento, isto é, as operações a executar são sempre do mesmo tipo, deve sempre existir a preocupação de executar o trabalho com qualidade e a baixo custo. A acrescentar a esta preocupação aparece actualmente um factor que pode determinar a diferença na razão preço/qualidade, é o factor tecnologia. Hoje em dia temos ao nosso dispor um número variadíssimo de equipamento com o qual pode ser feito um levantamento topográfico dependendo, obviamente, do rigor e do prazo exigidos. Estes aspectos podem condicionar, caso tenhamos vários recursos ao dispor, uma boa ou má decisão ao nível do planeamento. Contudo, os factores de localização geográfica do trabalho, como seja, distância à sede da empresa, tipo de terreno e sua cobertura, tipo de apoio geodésico existente, etc., podem de igual modo acrescentar condicionantes ao planeamento. Com tudo isto, não podemos pensar que planear um levantamento topográfico seja à partida uma tarefa fácil. Poderá ser fácil a operação em si, mas não conciliá-la com as exigências e expectativas do cliente e as especificidades do produto final.

Como componentes principais do planeamento de levantamentos topográficos, podemos considerar as seguintes: rigor técnico; factor económico; prazo de execução; e recursos. Sem querer distinguir, em termos de importância, qualquer destas componentes de planeamento, torna-se imperativo encontrar um compromisso entre elas, por forma a obter-se uma solução que garanta a qualidade a baixo custo.

Rigor técnico – ao nível do rigor técnico deve-se considerar alguns aspectos importantes: 1) a definição da escala de levantamento, caso não tenha sido imposta; 2) o estabelecimento de um esqueleto do levantamento, através da rede de apoio e sua ligação à rede geodésica, se necessário; 3) a formulação de um modelo matemático, onde se definem os métodos de observação e o equipamento a utilizar; 4) fazer um plano de operações, ao nível do trabalho de

campo e de gabinete; 5) informar devidamente as equipas topográficas do plano e das especificações do trabalho; 6) dar formação quando se introduzem novas tecnologias ou novos métodos de observação e cálculo; 7) verificar o estado do equipamento através de calibrações; 8) acompanhar o processo por técnicos especializados de forma a verificar e controlar a qualidade do trabalho dentro dos prazos previstos.

A decisão ao nível do apoio do levantamento deve confrontar-se com a diversidade de recursos materiais, com o tipo de apoio geodésico existente na zona ou na sua região, com o tipo de terreno, com o rigor exigido e ainda com o conhecimento técnico-específico do pessoal. Deve ainda considerar o tipo de materialização e intervisibilidades dos pontos de apoio, bem como, usar critérios de optimização para definir o número mínimo (necessário e suficiente) de pontos.

Estas condicionantes permitem ao decisor fazer uma pré-análise da configuração da rede de forma a obter à priori uma estimativa da precisão de todos os pontos do levantamento. É com base nesta pré-análise que se deve decidir pelas soluções mais correctas, do ponto de vista técnico. É evidente que a solução final dependerá dos restantes factores do planeamento, factor económico e prazo de execução. A solução técnica mais correcta nem sempre será a mais barata nem a mais rápida. Por isso, dever-se-á apresentar uma lista de soluções possíveis que respeitem os requisitos de rigor exigidos, parametrizadas em relação ao prazo de execução e ao custo, por forma a permitir às chefias a decisão óptima.

O estado do equipamento é de extrema importância para o rigor a atingir. Dele depende a eficácia de qualquer pré-análise, já que se baseia nos níveis de rigor assumidos para cada equipamento. Normalmente os instrumentos de medida não mantêm indefinidamente a precisão de fábrica; quer devido ao desgaste do material, quer à variação ao nível da dilatação de algumas componentes, quer ainda devido ao próprio manuseamento do equipamento, essa precisão degrada-se. Deste modo, ao nível da manutenção do equipamento, para além de o manter em perfeitas condições de conservação, deve-se proceder à calibração periódica do equipamento. Se o equipamento necessitar de assistência especializada, então deve-se recorrer a contratos de manutenção por parte do fornecedor ou através de empresas ou agentes especializados.

Todo equipamento de medição devem estar devidamente identificado com o seu estado de calibração. E a respectiva calibração deverá ser sempre feita de acordo com as normas nacionais ou internacionais publicadas para esse efeito e para esse tipo de equipamento.

A adequada formação técnica do pessoal afecto às operações específicas é obviamente um requisito técnico, que tem como objectivo a garantia da qualidade do trabalho a executar. Dada a constante invasão do mercado com novas tecnologias, a gestão ao nível dos recursos humanos exige por vezes uma formação dirigida em forma de reciclagem. Esta formação pode ser dada quer dentro da própria empresa, quer em centros especializados de formação, quer ainda no próprio fornecedor da tecnologia adquirida.

O acompanhamento do trabalho ao longo das várias fases deve ser feito com o objectivo de verificar o rigor e as especificidades ou requisitos do cliente. As respectivas operações situam-se ao nível do controlo de qualidade, que tem por objectivo detectar ocorrências ou não conformidades (defeitos, erros ou anomalias).

Factor económico - Ao nível do factor económico, e considerando que neste sector de serviços não é necessário recorrer ao fornecimento ordinário de bens com a excepção da compra de coordenadas geosésicas, os recursos principais são o equipamento, o pessoal e o meio de deslocação. Desta forma apenas há que contemplar os custos de despesas diárias da equipa topográfica (topógrafo e ajudante de topógrafo) em função do local de trabalho, sua distância à sede e respectiva remuneração mensal. Relativamente aos recursos humanos temos então, em termos de custos diários: os honorários $c_h = n_{dias} * \left(\frac{h_t + h_a}{30} \right)$, h – honorários, t – topógrafo, a – auxiliar; as ajudas de custo $c_a = n_{dias} (P_d * a)$ com P_d – valor de percentagem sobre a ajuda (100%, 75%, 50% ou 25%), dependendo esta percentagem do período diário de ausência em relação à sua residência; e as despesas de deslocação $c_d = n_{km} * v_t$ com o valor de tabela por quilómetro (v_t) actualmente de 30 centimos de euro. Relativamente à manutenção de equipamento, dever-se-á ter uma estimativa diária em função do seu custo anual $c_{me} = c_m / 360$ e da amortização do equipamento, no caso de o equipamento ter menos de 4 anos, $c_a = c_e / (4 * 360)$. Nesta contabilidade há que considerar, de igual forma, o trabalho de gabinete e todo equipamento informático necessário ao processamento dos dados. Há ainda que incluir, e especificamente para o trabalho de gabinete, as despesas corrente específicas (papel de impressora, toner, cartuchos de tinta, etc.) e as despesas correntes genéricas (luz, telefone, águas, limpeza, etc.).

Poderá por vezes, dado a especificidade do trabalho pedido, ter de recorrer-se a serviços externos, como seja consultoria e sub-contratação de trabalho específico, que devem também ser considerados nos custos do trabalho.

Finalmente, e depois de se efectuar o somatório de todas as despesas, há apenas que sobrepor a margem de lucro de acordo com a estratégia comercial da empresa.

Prazo de execução - No que diz respeito ao prazo de execução, além de ter de se cumprir o estipulado pelo cliente, deve ser considerado o seu enquadramento dentro dos diferentes trabalhos em curso nesse período, bem como, os recursos a afectar a esse trabalho e respectivas disponibilidades. Isto implica um planeamento periódico do tipo anual, semestral ou trimestral, cuja semana ou o dia será a sua unidade; o qual deve ser rigorosamente definido de forma transparente sem causar qualquer tipo de congestionamento. A sua forma em tabela permite uma fácil leitura e um acompanhamento adequado. O planeamento deve também contemplar a necessidade de sub-contratação de serviços nos períodos de pico da actividade, por forma a respeitar o cumprimento dos prazos de execução.

Para concluir, devemos acrescentar um factor de extrema importância ao nível da garantia da qualidade, trata-se da informação ao cliente, isto é, de manter constantemente o cliente informado sobre o decorrer dos trabalhos por forma a evitar uma insatisfação no final. Isto implica ainda que não deverá haver dúvidas sobre as expectativas do cliente, independentemente do cliente ser ou não perito na área da Topografia. Este aspecto é o que normalmente se designa por apoio ao cliente, que para o sector de fornecimento de produtos e bens se dá no período *pós venda*, e que no sector de prestação de serviços se inicia logo com a assinatura do contrato.

BIBLIOGRAFIA

- Bannister, A., *et al.* (1998). *Surveying*. Seventh Edition, Addison Wesley Longman Limited, England
- Casaca, J., *et al.* (2000). *Topografia Geral*. Lidel – Edições Técnicas, Lisboa.
- Kahmen, H. and W. Faig (1988). *Surveying*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Leick, A. (1989). *GPS Satellite Survey*. Edited by Jonh Willey & Sons, USA.
- Mikhail, E., *et al.* (1981). *Surveying Theory and Practice*. McGraw-Hill, USA.
- Muskett, J. (1995). *Site Surveying*. Blackwell Science Lda, London.